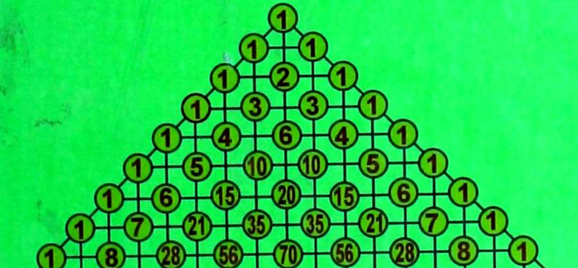
КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ,
ИЛИМ ЖАНА ЖАШТАР САЯСАТЫ МИНИСТРЛИГИ

ЖАЛАЛАБАТ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

ЭННАЗАРОВ Т.Н.

МАТЕМАТИКАНЫН БАШТАЛГЫЧ КУРСУНУН ТЕОРИЯЛЫК НЕГИЗДЕРИ



УДК 51
ББК 22.1
Э 66

Рецензенттер:

1. Алыбаев К. С.- физика жана математика илимдеринин доктору, профессор.
2. Калманбетов М.-физика жана математика илимдеринин кандидиты, профессордун милдетин аткаруучу.

Энназаров Т. Н.

Э 66. «Математиканын башталгыч курсунун теориялык негиздери». Жалалабат, 2005, 280 бет.

ISBN 9967-09-119-3

Окуу китеби мамлекеттик стандарттын «Математиканын башталгыч курсунун теориялык негиздери» предметине коюлган талаптарына жана окуу программасына ылайык түзүлдү.

Бул китеп жогорку окуу жайларында «Башталгыч класстардын мугалими» адистиги боюнча окуп жаткан студенттер үчүн даярдалды.

Э 1602010000-05

ISBN 9967-09-119-3

УДК 51
ББК 22.1

«Математика– бардык илимдердин,
ал эми арифметика– математиканын падышасы».
К. Гаусс.

Сөз башы

Математика илими жөнүндө эң алгачкы маалыматтарды окуучу башталгыч класстарда алары жалпыга белгилүү. Демек, аларга математика боюнча терең, аң сезимдүү билим берүү, алардын дүйнөгө болгон илимий көз карашын калыптандыруу, акыл сапаттарын өнүктүрүү жана болочок атуулдарын турмушка даярдоо милдеттери жүктөлөт. Мугалимдер «сан» жана «чоңдук» сыяктуу негизги фундаменталдык түшүнүктөр, алгебранын жана геометриянын элементтери жөнүндө тиешелүү маалыматтарды берүү менен катар көпчүлүк математикалык түшүнүктөрдү аныктоосуз, окуучалардын жаш өзгөчөлүгүнө ылайыктап беришет. Аталган проблемаларды чечүү башталгыч класстардын мугалимдерин даярдоого өзгөчө талаптарды коет, башкача айтканда башталгыч класстарда математиканын негиздерин окутуу үчүн ал натуралдык сандар жана чоңдуктар жөнүндө туура түшүнүккө ээ болуусу, арифметикалык амалдардын ар түрдүү аныктоолорун жана касиеттерин билүүсү, түрдүүчө эсептөө ыкмаларын өздөштүрүү гана эмес, аларды окуучуларга үйрөтө алышы, текстүү маселелерди чыгарууга ар бир амалды тандоону негиздей билиши зарыл.

Курстун өзөгү болуп математиканын баштапкы курсунун орчундуу бөлүгү болгон арифметикалык материал– терс эмес бүтүн сандар жана алар менен аткарылуучу операциялар эсептелет. Ошол себептүү, окуу куралында аталган бөлүккө көбүрөөк токтолууга туура келди.

Окуу куралындагы тигил же бул теориялык материалдын аягында, анын башталгыч класстардын программасындагы ээлеген орду жана практикалык колдонулуштары көрсөтүлдү. Мисалы, сумманы санга көбөйтүү касиетин берүүдө анын эки же үч орундуу сандарды бир орундуу санга көбөйтүү эскертилет жана ал ыкма көрсөтүлөт. Башкача айтканда

$$23\cdot4 = (20+4)\cdot4 = 20\cdot4+3\cdot4=92$$

$$235\cdot4= (200+30+5)\cdot4 = 200\cdot4+30\cdot4+5\cdot4= 940$$

Колдонулган тил мүмкүн болушунча жатык жана жөнөкөй, айрым сүйлөм-айтылыштарды кыргызчалатууда, негизинен алардын мазмунун туура сактоо принциби жетекчиликке алынды.

Окуу китебин түзүүдө:

1. Көп жылдардан бери колдонулуп келген жана мындан ары да көп кызмат кыла турган
    - а) Н.Я.Виленкин баштаган бир топ авторлордун «Математика» окуу китеби.
    - б).Л.А.Сидорова редакциялаган «Теоретические основы начального курса математики» деген окуу китеби.
    - в).Л.П.Стойлова жана А.М.Пышкало жазган «Основы начального курса математики» деген окуу китеби жана бир топ адабияттар колдонулду жана жетекчиликке алынды.
2. Физика- математика илиминин доктору К.Алыбаевдин, техникалык илимдин докторлору А.Ашыралиевдин жана А.Каримовдун, педагогика илиминин кандидаттары Б.Апышевдин, М.Назаровдун, Т. Акматованын баалуу кеңештери жана сунуштары эске алынды.
3. А.Абдыкеримов, З.Г.Сулайманова, А.Темирбаев, Е.Н.Селиверстова, З.Сеитмаматова, Л.В.Ваганова, Ш.Кочкоров, сыяктуу практик, башталгыч класстар үчүн адистерди даярдоо устаттарынын көп жылдык иш тажрыйбалары пайдаланылды. Аталган илимпоздорго жана педагогикалык эмгек ардагерлерине автор өтө ыраазычылык билдирет жана сунуш этилген окуу куралы боюнча сын пикирлерди, сунуштарды күтөт.

Автор

I ГЛАВА

Көптүктөр теориясынын элементтери.

1. Көптүк жөнүндө түшүнүк. Анын элементтери жана түрлөрү.

Көптүк түшүнүгү математикада негизги түшүнүктөрдүн бири болуп эсептелет. Ошондуктан ага аныктоо берилбестен, мисалдар аркылуу түшүндүрмөлөр (мүнөздөмөлөр) берилет. Мисалы: мектеп окуучуларын, үндүү тыбыштардын, эки орундуу сандардын, короодогу койлордун, $2x-1>x+5$ барабарсыздыгынын тамырларынын, окуу залындагы китептердин, сүт эмүүчү жаныбарлардын көптүктөрү жөнүндө айтууга болот. Турмушта "көптүк" деген сөз (термин) "топ", "жыйынды", "букет", "боо", "үйүр", "класс" ж.б. сыяктуу сөздөрүнүн ордуна колдонулат.

Көптүктөрдү түзгөн жаратылыштагы ар кандай обьектилер (өсүмдүктөр, сандар, жылдыздар, китептер, адамдар, геометриялык фигуралар ж.б.) ошол көптүктүн элементтери деп аталышат жана алар латын алфавитинин кичине тамгалары (a,b,c,d,e,..) менен белгиленет. Ал эми көптүктөр A,B,C,D,E,.. тамгалары менен белгиленишет. Эгер а элементи К көптүгүнүн элементи болсо ("Асан $1^{а}$ классында окуса"), анда "а" элементи К көптүгүнө тиешелүү деп айтылат жана $a \in K$ деп жазылат. Тиешелүү болбосо $a \notin K$ деп жазылат да "а тиешелүү эмес К" деп окулат. Мисалы: Эгер М так сандардын көптүгү болсо, анда $3 \in M$, $17 \in M$, $8 \notin M$, $1002 \notin M$, $\frac{1}{2} \notin M$.

Кармап турган элементтердин санына жараша көптүктөр **чектүү, чексиз, бош** болушат: Эгер тигил же бул көптүктүн элементтерин санап чыгууга (номерлөөгө) мүмкүн болсо, анда ал чектүү көптүк болот. Мисалы: Бир орундуу сандардын көптүгү, класстагы отургучтардын көптүгү, ж.б. Эгер саноого мүмкүн эмес болсо, анда ал чексиз көптүк болот. Мисалы: Жуп сандардын көптүгү, сан огундагы чекиттердин көптүгү, ааламдагы молекулалардын көптүгү, ж.б.

Эч кандай элементи жок көптүк бош көптүк деп аталат жана $\varnothing$ деп белгиленет. Мисалы: Туура үч бурчтуктун тик бурчтарынын көптүгү, $2x-1=0$ теңдемесинин бүтүн тамырларынын көптүгү, Жалалабат шаарындагы микроавтобустардын көптүгү, ж.б.

Турмушта бир гана элементүү көптүктөр да кездешет. Мисалы: Экө чейинки жуп сандардын көптүгү, тегеректин борборлорунун көптүгү, ж.б. Мындай көптүктөр бирдик көптүктөр деп аталышат жана Е («Единичное») тамгасы менен белгиленет.

Айрым көптүктөрдүн элементтери да өздөрүнчө көптүктөр болушу мүмкүн. Мисалы, А кандайдыр бир мектептин класстарынын көптүгү болсо, анда ар бир класс окуучулардын көптүктөрү болушат. Бирок, окуучулар А көптүгүнүн элементтери боло алышпайт.

Көптүктөр теориясы математиканын баштапкы курсун окутуунун негизин түзүү менен анын үйгүсүн пайда кылуу жана калыптандырууда чечүүчү мааниге ээ. Натуралдык сандарды пайда кылуу, кошуу, кемитүү, көбөйтүү амалдары жана алардын эң негизги касиеттери жөнүндө так, терең түшүнүктөрдү өздөштүрүү көптүктөр теориясынын негизинде гана жүргүзүлөт. Ошондуктан баштапгыч класстар үчүн адистерди даярдоодо аталган теманы окутууга өзгөчө көңүл бурулушу абзел.

2. Көптүктөрдүн берилиш жолдору.

Ар кандай об'ектинин берилген көптүккө тиешелүү же тиешелүү эмес экендигин так айтууга мүмкүн болсо, анда ошол көптүк берилди деп эсептелет. Практикада көптүктөр негизинен эки жол менен берилет:

а) Көптүктүн элементтерин атоо жолу. Мында берилген көптүккө тиешелүү болгон элементтер конкреттүү түрдө атап көрсөтүлөт.
Мисалы: А={Акыл, Акмат, Зыйнат, Эсен}
В={7,9,11,13,15,17}
Бул жол менен элементтердин саны анчалык көп болбогон чектүү көптүктөр гана берилет. Чексиз көптүктөрдү же элементтерди өтө көп болгон көптүктөрдү аталган жол менен берүүгө мүмкүн эмес.

б) Мүнөздөөчү касиет аркылуу. Мында ошол көптүктүн элементерине гана мүнөздүү болгон касиет берилет да, анын негизинде көптүктүн элементтери табылат

Мисалы:

- М-2^{б} классынын окуучуларынын көптүгү десек, анда мүнөздөөчү касиет болуп «2^{б} классынын окуучусу» болот. Бул касиеттин негизинде 2^{б} классындагы окуучуларды атоого болот.
- К көптүгү 7ге чейинки оң бүтүн сандардын көптүгү болсо, анда бул касиет аркылуу берилген көптүктүн элементтери аныкталат б.а. К={1,2,3,4,5,6}

Бул көптүктү төмөнкүчө жазышат: К={ x | x<7, x∈N}.

Кээ бир көптүк бир нече мүнөздөөчү касиет аркылуу берилиши мүмкүн.

Мисалы:

- Квадраттардын көптүгүн жактары барабар болгон тик бурчтуктардын көптүгү жана бурчтары тик болгон ромбалардын көптүгү катарында берүүгө болот.
- $Q=\{2,3\}$ көптүгүн бирден чоң, бирок 4 төн кичине болгон натуралдык сандардын көптүгү жана $(x-2)(x-3)=0$ теңдемесинин тамырларынын көптүгү деп бере алат.

Көптүктөрдүн экинчи жол менен берилиши бир топ ыңгайлуу жана универсалдуу, себеби бул жол менен чексиз көптүктөрдү да берүүгө болот. Мисалы:

N – натуралдык сандардын көптүгү,
Z_0 –оң бүтүн сандардын көптүгү.
Z - бүтүн сандардын көптүгү
Q – рационалдык сандардын көптүгү.
R – анык сандардын көптүгү.
J - иррационалдык сандардын көптүгү.

Демек, $N\subset Z_0\subset Z\subset Q\subset R\subset J$

Айрым учурда бир эле көптүктү эки жол менен да берүүгө болот.

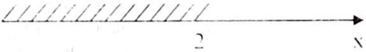
Математикада элементтерди мүнөздөөчү касиет аркылуу оңой көптүктөрдү табууга маселелерди чыгарууга туура келет.

Мисалы 1 $2(x-1)(x-5)=0$ теңдемесинин тамырларынын көптүгүн тапкыла.

Мында изделүүчү көптүктүн элементтерин мүнөздөөчү касиет болуп «берилген теңдеменин тамыры» эсептелет. Көбөйтүндү $x_1=1$, $x_2=5$ болгондо гана нөлгө барабар болушу мүмкүн. Ошондуктан изделүүчү көптүк $T=\{1,5\}$ болот.

Мисалы 2 $2x+1\geq 5\ x$ барабарсыздыгынын тамырларынын көптүгүн тап жана аны сан огунда сүрөттө.

Мүнөздөөчү касиет барабарсыздыктын тамыры болуу. Тиешелүү өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин $x\geq 2$ экендиги келип чыгат. Демек, изделүүчү көптүк $T=\{x \mid x\geq 2,\ x\in R\}$ болсо, ал сан огунда сүрөттөлөт:



Бул көптүк $|x\geq 2|$ түрүндө да жазылат.

Баштапгыч класстардын программасында бул темага байланыштуу төмөнкүдөй көнүгүүлөр аткарылат:

а) 48 жана 52 сандарынын арасындагы сандарды атагыла жана жазгыла.

б) 97 ден баштап саноону улантkыла.
в) 13 төн кичине болгон жуп сандарды атагыла
г) Бурчу тик болгон фигураларды көрсөткүлө
д) 18 санынын бөлүүчүлөрүн тапкыла.

3. Барабар көптүктөр.

Бирдей гана элементтерден турган көптүктөр барабар көптүктөр деп аталышат жана $A=B$ деп жазылат.

Мисалы, $A=\{3,7,9,11\}$ жана $B=\{7,3,11,9\}$ көптүктөрү берилсе, анда $A=B$. Демек, көптүктүн элементтеринин ордун которуудан көптүк өзгөрүлбөйт.

4. Камтылган көптүк (көптүкчө)
Эйлер-Венндин диаграммалары.

Эгер $A-$ группадагы студенттердин, ал эми $B-$ группадагы отличниктердин көптүктөрү болсо, анда B көптүгүнүн бардык элементтери A көптүгүндө бар, б.а. B көптүгү A көптүгүнүн бир бөлүгү болот (камтылып турат).

Аныктоо: Эгер B көптүгүнүн ар бир элементи A көптүгүнө тиешелүү болсо, анда B көптүгү A көптүгүнө камтылган көптүк деп аталат жана $B\subset A$ же $A\supset B$ деп жазылат.

Мисалы:

а) Жуп сандардын көптүгү натуралдык сандардын көптүгүнө камтылган көптүк болот.

б) $A=\{m,n,k,t,l,u\}$ жана
$B=\{m,k,u\}$ көптүктөрү берилсе $B\subset A$ же $A\supset B$ болот.

в) Жаныбарлардын көптүгү койлордун көптүгүн камтыйт.

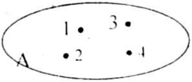
Аныктоонун негизинде ар кандай A көптүгү үчүн $A\subset A$ жана $\varnothing\subset A$ экендиги анык. A көптүгү менен дал келбеген анын ар кандай бош эмес көптүгү A нын өздүк камтылган көптүгү деп аталат. A жана $\varnothing$ көптүкчөлөрү A көптүгүнүн өздүк эмес камтылган көптүгү болот.

Мисалы, $A=\{1,3,5\}$ көптүгүнүн өздүк камтылган көптүктөрү: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{3,5\}$ жана өздүк эмес камтылган көптүктөрү: $\varnothing$ жана $\{1,3,5\}$. Жогорку аныктоолордун негизинде: Эгер $A\subset B$ жана $B\subset A$ болсо, анда $A=B$ экендиги келип чыгат.

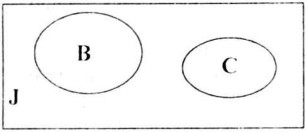
Көптүктөрдү жана алардын арасындагы байланыштыктарды ачык элестетүү үчүн көптүктөрдү ар түрдүү геометриялык фигуралар аркылуу сүрөттөшкөн. Мындай көптүкөрдү сүрөттөө алгач швейцариялык математик Эйлер (1707 – 1783) жана англиялык математик Джон Венн тарабынан киргизилгендиктен илимде алар Эйлер-Венндин диаграммалары деп аталып калган.

Мисалы:

а) $A=\{1,2,3,4\}$ көптүгү берилсе, анда элементтерди чекит аркылуу белгиленет.



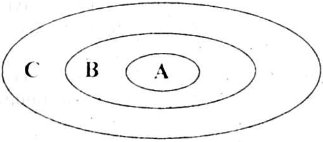
б)



$B \subset J$
$C \subset J$

В жана С нын жалпы элементтери жок. J– универсалдык көптүк.

в) Эгер $A \subset B$, $B \subset C$ болсо, анда $A \subset C$.



Көптүк түшүнүгүнүн негизинде **геометриялык фигураны** аныктоого болот. б.а., чекиттердин ар кандай бош эмес көптүгү геометриялык фигура деп аталат. Демек, геомертиялык фигура болуп чекит, кесинди, түз сызык, тегиздик, үч бурчтук, пирамида, шар, ж.б. эсептелинет. Эгер, F_1 фигурасы F_2 фигурасынын өздүк камтылган көптүгү болсо, анда F_1 фигурасы F_2 фигурасынын **бөлүгү** болот.

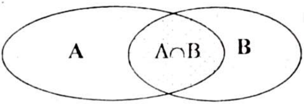
Мисалы. АВ кесиндиси АВС үч бурчтугунун бир бөлүгү болот.

5. Көптүктөрдүн кесилиши.

Практикада эки же андан ашык көптүктөрдөн ар түрдүү операцияларды пайдаланып, жаңы көптүктөрдү түзүүгө болот. Ал операцияларга көптүктөрдүн жалпы элементтерин табуу, аларды бириктирүү же көптүктүн айрым элементтерин алып таштоо ж.б. кирет. Аталган операциялардын бири көптүктөрдүн кесилиши болуп эсептелет.

Аныктоо: А жана В көптүктөрдүн кесилиши деп алардын экөөнө тең тиешелүү болгон элементтерден турган көптүк аталат жана $A \cap B$ деп белгиленет.

Сүрөттөлүшү:



Аныктоого ылайык көптүктөрдүн кесилишин төмөнкүчө жазууга болот:

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ жана } x\in B\}.$$

Эгер көптүктөр жалпы элементке ээ болбосо, $A\cap B=\varnothing$ экендиги анык.

Экиден ашык көптүктөрдүн кесилишин да табууга болот (топтоштуруу касиетин кара).

Эгер көптүктөр мүнөздөөчү касиеттер аркылуу берилсе, анда алардын кесилишин мүнөздөөчү касиетин табуу үчүн берилген касиеттерди "жана" деген байламта аркылуу бириктирүү керек.

Мисалы: A- группадагы кыздардын

B- группадагы отличниктердин көптүктөрү берилсе, анда алардын кесилиши $A\cap B$– группадагы отличник (жана) кыздардын көптүгү болот.

Көптүктөрдүн кесилиши төмөнкү касиеттерге ээ:

1) Орун алмаштыруу касиети (кесилиштин коммутативдүүлүгү): Ар каандай A жана B көптүктөрү үчүн $A\cap B= B\cap A$. Бул касиеттин чын экендиги кесилиштин аныктоосунан келип чыгат.
2) Топтоштуруу касиети (кесилиштин ассоциативдүүлүгү): Ар кандай A,B жана C көптүктөрү үчүн $(A\cap B)\cap C= A\cap(B\cap C)$. Бул касиет экиден ашык көптүктөрдүн кесилишин табууга мүмкүнчүлүк берет.

Касиеттин туура экендигине Эйлер-Венндин диаграммалары же конкреттүү мисалдын жардамы менен ишенүүгө болот.

Мисалы: Берилсин $A=\{1,3,5,6,7,9\}$,

$B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$C=\{5,6,7,8,9,10\}$

Анда барабардыктын сол жагы

$$A\cap B=\{1,3,5,6,7\}$$

$$(A\cap B)\cap C=\{5,6,7\}$$

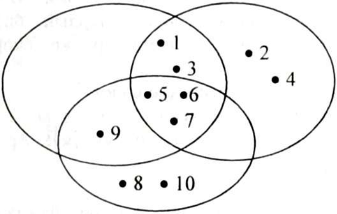
ал эми оң жагы

$$B\cap C=\{5,6,7\}$$

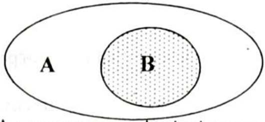
$A\cap(B\cap C)=\{5,6,7\}$ экендиги келип чыгат.

Демек, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

Диаграммасы:



3) Эгер $B\subset A$ болсо, анда $A\cap B=B$.



4) Ар кандай A көптүгү үчүн $A\cap A=A$ жана $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap J=A$. Акыркы касиеттин чын экендиги 3-касиеттен келип чыгат $A\subset A$ жана $\varnothing\subset A$, $A\subset J$.

6. Көптүктөрдүн бириктүүсү.

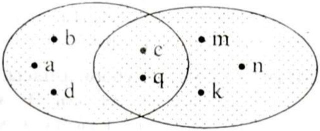
Аныктоо: A жана B көптүктөрүнүн жок дегенде бирине тиешелүү болгон элементтерден турган көптүк алардын бириктүүсү деп аталат жана $A\cup B$ деп белгиленет.

Мисалы: Эгер $A=\{a,b,c,d,e\}$

$B=\{c,e,m,n,k\}$ көптүктөрү берилсе анда,

$A\cup B\quad=\{a,b,c,d,e,m,n,k\}$ болот.

Диаграммасы:



Сегиз формасындагы штрихтелген фигура жогорку бирикменин сүрөттөлүшү болот.

Эгер көптүктөр мүнөздөөчү касиеттер аркылуу берилсе, анда бирикменин мүнөздөөчү касиети алардан «же» деген байламта менен куралат, б.а., $A\cup B=\{x \mid x\in A$ же $x \in B\}$.

Мисалы, A– группадагы отличниктердин ал эми B-группадагы спортсмендердин көптүктөрү болсо, анда алардын биригүүсүнүн мүнөздөөчү касиети «группадагы отличниктер же спортсмендер» болот.

Экиден ашык көптүктөрдү да бириктирүүгө болот.

Көптүктөрдүн биригүүсү төмөнкү касиеттерге ээ:

1) Орун алмаштыруу касиети (коммутативдүүлүк): Ар кандай A жана B көптүктөрү үчүн

   $A\cup B=B\cup A$ болот.

   Бул касиеттин тууралыгы биригүүнүн аныктоосунан келип чыгат.

2) Топтоштуруу касиети (ассоциативдүүлүк): Ар кандай A, B жана C көптүктөрү үчүн

   $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ болот.

   Касиеттин чын экендигине мисал жана диаграммасын сызуу аркылуу ишенүүгө болот.

3) Эгер $B\subset A$ болсо, анда $A\cup B=A$ болот. Жогоркунун негизинде ар кандай A көптүгү үчүн

   $A\cup A=A$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cup J=J$ экендиги келип чыгат. Булардын чын болушу көптүктөрдүн кесилишиндеги сыяктуу эле аныктоодон келип чыгат.

4) Бөлүштүрүүчүлүк касиети (дистрибутивдүүлүк):

   Ар кандай A, B жана C көптүктөрү үчүн

   $$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
   $$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

   Бул барабардыктардын тууралыгына да жогорку сыяктуу конкреттүү мисал жана алардын диаграммалары аркылуу ишенүүгө болот.

Көптүктөрдүн биригүүсү жана анын касиеттери натуралдык сандарды кошуу, анын касиеттерин окуп үйрөнүүгө теориялык негиз болот. Ошондуктан болочоктогу башталгыч класстын мугалими бул теманы терең жана аң-сезимдүү өздөштүрүүсү зарыл.

7. Толуктоочу көптүк. Көптүктөрдүн айырмасы.

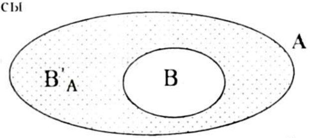
Айталы A– класстагы окуучулардын, ал эми B– класстагы кыздардын көптүгү болсун. Эгер B көптүгүнө класстагы балдардын көптүгүн бириктирсек (кошсок), анда A көптүгү келип чыгат. Бул операцияны «B көптүгүнүн A көптүгүнө чейин толукталды деп айтышат.

Аныктоо: Эгер $B\subset A$ болсо, анда B да жок A нын элементтеринен түзүлгөн көптүк B ны A га чейин толуктоочу көптүк деп аталат жана B'_A –деп белгиленет.

Жогорку мисалда B'_A –класстагы балдардын көптүгү болот.

Демек, аныктоо боюнча $B\cup B'_A=A$ болот.

Диаграммасы



B көптүгүнүн универсалдык көптүккө чейин толуктоочу B' көптүгүн деп гана белгилешет. J көптүгүнө камтылган ар кандай A жана B көптүктөрү үчүн төмөнкү барабардыктар аткарылат:

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

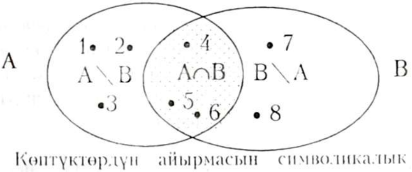
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

Практикада толуктоочу көптүк төмөнкүчө табылат: A={10,20,30,40,50,60} жана B={10,30,50} көптүктөрү. Мында $B\subset A$. B'_A көптүгүн табуу үчүн A көптүгүнөн B да бар болгон элементтерди жок кылуу керек, б.а., B'_A={20,40,60}. Кээде «A көптүгүнөн B көптүгүнүн кемитүү керек» деп да айтышат.

Аныктоо: B көптүгүнө тиешелүү болбогон A көптүгүнүн элементтеринен түзүлгөн көптүк A жана B көптүктөрүнүн айырмасы деп аталат жана $A\setminus B$ деп белгиленет. Мында B нын A га болгон камтылышы шарт эмес.

Мисалы, A={1,2,3,4,5,6} жана B={4,5,6,7,8} көптүктөрү берилсе, анда $A\setminus B$={1,2,3}, $B\setminus A$={7,8}

Диаграммасы



Көптүктөрдүн айырмасын символикалык түрдө төмөнкүчө белгилешет.

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ жана } x\notin B\}$$

$$B\setminus A=\{x \mid x\in B \text{ жана } x\notin A\}$$

Мындан $A \setminus B \neq B \setminus A$ экендиги көрүнүп турат. Бирок, $A=B$ болгондо гана $A \setminus B = B \setminus A$ болушу ачык.

Жогоркулардын негизинде төмөнкү барабардыктардын тууралыгына ишенүүгө болот:

$A' = J \setminus A$

$A \setminus B = A \setminus (A \cup B)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Эгер көптүктөрдү кемитүү операциясы кесилиш менен (кашаасыз) берилсе, анда эң оболу кесилишти аткаруу керек б.а. $A \setminus B \cap C$ берилсе мурда $B \cap C$ операциясы аткарылат.

8. Картеж. Түгөйлөр.

Көптүктүн ар бир элементи бир гана жолу катышып, анын көптүктөгү ээлеген орду (тартиби) эч кандай мааниге ээ эмес экендиги белгилүү. Мисалы, {1,3,4,5}, {3,1,5,4}, {5,4,3,1} көптүктөрү өз ара барабар көптүктөр. Бирок, айрым учурда ошол элементтердин ирети, ээлеген орду да мааниге ээ болот. Мисалы, 1345, 3154, 5431 сандары бирдей цифралардан (элементтерден) түзүлгөндүгүнө карабастан, бири-биринен айырмаланышат.

Ошондой эле «пирамида» деген сөздөгү тамгалардын көптүгүнүн ар түрдүүчө жазууга болот: {п,и,р,а,м,д}, {а,д,р,и,м,п}, {р,и,м,а,п,д}, ж.б. Бирок, ал сөздү туура жазуу үчүн ал тамгалардын (көптүктүн элементтеринин) ирети, тартиби же ээлеген орду мааниге ээ.

Математикада об'ектилердин жогоркудагыдай иреттүү тобун (жыйындысын) **картеж** деп коюшат. Турмушта машиналардын, адамдардын, цифралардын, тамгалардын картеждери кездешет. (Картеж француз тилинен алынып «салтанаттуу жүрүш (парад)» деген маани берет).

Картежге катышкан ар бир элемент анын компонентасы же координатасы деп аталат жана ээлеген ордуна жараша солдон оңго карай 1-компонента, 2-компонента, ж.б. болушат. Жазылышы: <п,и,р,а,м,и,д,а>. компенанталардын саны картеждин узундугу деп аталат. Жогорку картеждин узундугу 8 ге барабар.

Аныктоо: $<a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n> = <b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m>$ эгерде $n=m$ жана $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$, …, $a_n=b_m$ болсо.

Мисалы: <5,7,8,3>=<5,7,8,3>

<5,7,8,3>≠<5,8,3,7>

Узундугу экиге барабар болгон картеж **түгөй** деп аталат жана (a_1,a_2) деп белгиленет.

Математикада мындай түгөйлөргө тик бурчтуу координата системасындагы чекиттин координаттары, бөлчөк санындагы бүтүн сандардын түгөйлөрү мисал болушат, б.а., M(7,3) жана N(7,3) чекиттери дал келишет, ал эми A(7,3) жана B(3,7) чекиттери дал келишпейт. Ошондой эле $\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$, ал эми $\frac{3}{7}\neq\frac{7}{3}$ экендиги анык.

9. Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү.

Класстагы дежур болуучу окуучулардын A={Бакыт, Эсен, Жунус, Кеңеш, Урмат} көптүгү жана жуманын күндөрүнүн B={Дүйшөмбү, шейшемби, шаршемби, бейшемби, жума, ишемби} көптүгүнүн элементтеринен төмөнкүдөй түгөйлөр түзүлүшү мүмкүн:

(Бакыт, дүйшөмбү),(Бакыт, шейшемби),... ,
(Эсен, дүйшөмбү), (Эсен, шейшемби),..,
(Урмат, жума), (Урмат, ишемби).

Мында «Бакыт дүйшөмбү күнү дежур болот» деген маанида.

Пайда болгон түгөйлөрдүн биринчи компонентасы A көптүгүнөн, ал эми экинчиси B көптүгүнөн алынган. Ушундай жол менен түзүлгөн түгөйлөрдүн көптүгүн математикада A жана B көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү деп коюшат.

Аныктоо: X жана Y көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү деп биринчи компонентаны X тен, экинчиси Утен алынып түзүлгөн түгөйлөрдүн көптүгү аталат жана
$XxY=\{(x,y) \mid x\in X,\ y\in Y\}$ деп жазылат.

Мисалы, X={1,2,3}, Y={a,m,n,k} көптүктөрү берилсе, анда

$$XxY= \{(1,a),(1,m),(1,n),(1,k),$$
$$(2,a),(2,m),(2,n),(2,k),$$
$$(3,a),(3,m),(3,n),(3,k)\}$$ болот.

Бул көбөйтүндүнү таблица түрүндө жазып көрсөтүү бир топ ыңгайлуу, б.а.

Y X	a	m	n	k
1	(1,a)	(1,m)	(1,n)	(1,k)
2	(2,a)	(2,m)	(2,n)	(2,k)
3	(3,a)	(3,m)	(3,n)	(3,k)

Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү орун алмаштыруу жана топтоштуруу касиеттерине ээ эместигине мисал аркылуу оңой эле ишенүүгө болот, б.а. $X \times Y \neq Y \times X$, $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$. Бирок, биригүүнүн көбөйтүндүсүнө карата болгон бөлүштүрүүчүлүк касиетине ээ, б.а. ар кандай X, Y жана Z көптүктөрү үчүн $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

Бул касиетти далилдөөсүз кабыл алабыз! Ошондой эле $X \times X$ көбөйтүндүсү да жашайт.

Картеж түшүнүгүн пайдаланып, саны n болгон көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүн аныктоого болот, б.а.,

Аныктоо: A_1, A_2, …, A_n көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү деп узундугу n болгон, биринчи компонентаны A_1 ден, экинчиси A_2, …, n-чиси A_n деп алынган картеждердин көптүгү аталат жана $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ деп жазылат.

Мисалы: $A_1=\{2,3\}$, $A_2=\{3,4,5\}$, $A_3=\{7,8\}$ көптүктөрү берилсе, анда

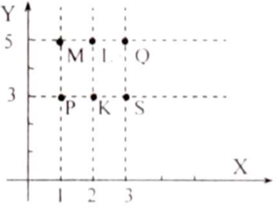
$A_1 \times A_2 \times A_3 =$ $\{<2,3,7>, <2,3,8>, <2,4,7>, <2,4,8>,$
$<2,5,7>, <2,5,8>, <3,3,7>, <3,3,8>,$
$<3,4,7>, <3,4,8>, <3,5,7>, <3,5,8>\}$

Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү Эйлер-Венндин диаграммасы аркылуу сүрөттөөгө мүмкүн эмес. Бирок, эки көптүктүн декартттык көбөйтүндүсүн тик бурчтуу координата тегиздигинде сүрөттөөгө болот. Эгерде A жана B сан көптүктөрү берилсе, анда алардын декартттык көбөйтүндүсүнүн элементтери (x,y) түрүндөгү иреттелген түгөйлөр болушат. Ал чекиттерди координаталык тегиздикке түшүрсөк, алардын көптүгү берилген A жана B көптүктөрдүн декартттык көбөйтүндүсүн сүрөттөөчү фигураны берет.

Мисалы:

а) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$.

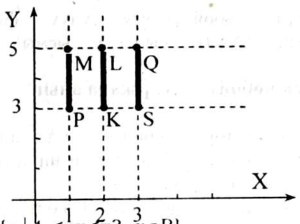
Анда $A \times B=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)\}$



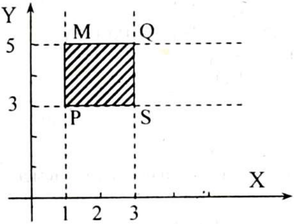
M,L,Q,P,K,S–чекиттерден турган фигура берилген көбөйтүндүнүн сүрөттөлүшү

б) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{y \mid 3<=y<=5,\ y \in R\}$

Бул учурда изделүүчү фигура MP, LK, QS кесиндилеринен турат:

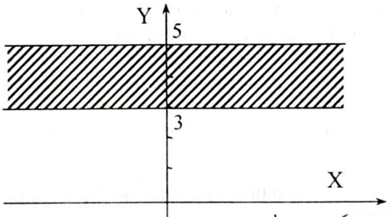


в) A={x | 1,<=x<=3, x∈R}
B={y | 3<=y<=5. y∈R}



MQSP квадраты изделүүчү фигура.

г) A=R, B={y | 3<=y<=5. y∈R}



Штрихтелген тилкече – изделүүчү фигура болот.

д) Эгер A=B=R болсо, анда AxB көбөйтүндүсү (x,y) түрүндөгү мүмкүн болгон бардык анык сандардын түгөйлөрүнөн турат. Демек, тик бурчтуу декарттык координата системасынын бардык чекиттери б.а. XOY тегиздиги болот.

Ошол себептүү көптүктөрдүн көбөйтүндүсү улуу француз окумуштуусу Рене Декарттын (XVII кылым) ысмы менен байланышкан.

10. Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү жана анын кээ бир маселелери.

А жана В чекиттүү көптүктөрү берилсе, анда алардын декарттык көбөйтүндүсүндө канча элемент бар экендигин алардагы элементтердин саны аркылуу билүүгө болот б.а.

Теорема: Эгер А көптүгүндө m элемент, ал эми В көптүгүндө n элемент болсо, анда алардын декарттык көбөйтүндүсүндө m·n элементи болот.

Далилдөө: Берилсин $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$
$B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ көптүктөрү.

Анда алардын декарттык көбөйтүндүсү

$$
\begin{array}{ll}
A\times B= & \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),\dots,(a_1,b_n),\\
 & (a_2,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_2,b_n),\\
 & \text{\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_}\\
 & (a_m,b_1),(a_m,b_2),\dots,(a_m,b_n)\}
\end{array}
$$

Бул көптүктөрдө m жолчо, n мамыча бар, демек бардык элементтердин саны m, n болот.

Берилген теореманы төмөнкүчө да айтууга болот:

Эгер $n(A)=m$, $n(B)=n$ болсо, анда $n(A\cdot B)=m\cdot n$ болот. Мындан $n(A)\cdot n(B)=n(A\cdot B)$ деп жазууга болот. Ошондой акыркы барабардык экиден ашык көптүктөр үчүн да туура болот б.а.

$$n(A_1\cdot A_2\cdot,\dots,\cdot A_n)=n(A_1)\cdot n(A_2)\dots n(A_n).$$

Эскертүү: Акыркы белгилөөлөрдө $n(A)$– «А көптүгүнүн элементеринин саны» деп окулат.

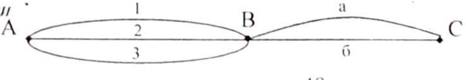
Натыйжа катары: $n(A\cdot A)=n(A)\cdot n(A)=m\cdot m=m^2$

Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүндөгү элементтердин санын табууга берилген маселелер комбинаторикалык маселелер деп аталышат. Комбинаторика математиканын өзгөчө бир маанилүү бөлүгүн түзөт.

Мындай маселелердин практикада изделүүчү эң жөнөкөй учурларын карап көрөлү:

Маселе 1. А шаарынан В шаарына 3 жол, ал эми Вдан Сга чейин 2. жол барат. Адан С га чейин В аркылуу канча түрдүү жол менен барууга болот?

Чиймеси



Эгер А дан В га чейинки жолдорду 1,2,3, ал эми В дан С га баруучу жолдорду а, б деп алсак, анда А дан С га баруучу жолдор: (1,а),(1,б),(2,а),(2,б),(3,а),(3,б) лар болот. Бул түгөйлөр {1,2,3} жана {а,б} көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүнүн элементтери. Демек, чиймесин сызбай эле жана бардык түгөйлөрдү жазып отурбастан, акыркы теореманы пайдаланып, маселенин суроосуна жон гана 3·2=6 деп жооп берүүгө болот.

<u>Маселе 2</u>: 5, 6 жана 7 цифраларын пайдаланып, канча үч орундуу сан жазууга болот. Эгерде,

а) цифралар кайталанса;

б) цифралар кайталанбаса.

а) эгер цифралар кайталанса, анда 3 орундуу сандагы ар кандай орунга берилген цифралардын каалаганын коюуга болот. б.а. ар бир цифраны тандоо жолдорунун саны үчтөн. Демек, 3·3·3=27 үч орундуу сан түзүүгө болот.

б) Эгер цифралар кайталанбаса, анда 5 тин 3 мүмкүнчүлүгү, ал эми 7 нин 1 гана мүмкүнчүлүгү болот. Демек, бул учурда аталган цифраларды пайдаланып 3·2·1=6 гана үч орундуу сандарын жазууга болот. (567, 657, 675, 576, 765, 756)

II ГЛАВА
Айтылыштар жана алар менен жүргүзүлүүчү операциялар.

1. Обьектилер, алардын класстары жана касиеттери.

Адам затын курчаган чөйрө ар түрдүү об'ектилерден турат. Алар: жаныбарлар, өсүмдүктөр, тоо-таштар, машиналар, ж.б. Тигил же бул об'ектини окуп үйрөнүүдө жана таанып билүүдө анын айрым касиеттери: түсү, салмагы, узундугу, температурасы, саны, формасы ж.б. бизди кызыктырат. Алар же сан түрүндө (узундугу 15 м), же башкача (түсү кызыл, массасы оор,...) мүнөздөлүшү (берилиши) мүмкүн. Жаратылыштагы об'ектилердин ортосунда ар түрдүү байланыштар (катнаштыктар) бар. Мисалы: «Асан ушул үйдө жашайт», «машиналар гаражда турат», «жаңгак токойдо өсөт», ... Об'ектилер жана алардын касиеттери жөнүндө сөз болгондо айрым айрылыштар (бир толук ойду билдирген сүйлөмдөр да берилет). Мисалы, «Группада 25 студент бар», «эшиктин туткасы темирден жасалган», «жыгач баштан катуу», ж.б. Булар чын же жалган болушат.

Математиканын башка илимдерден болгон өзгөчөлүгү– ал чөйрөдөгү об'ектилердин өзгөчө касиеттерин: сандык жана мейкиндик касиеттерин карайт жана аларды абстракциялайт. Демек, математикалык об'ектилер болуп сан, түз сызык, тегиздик, геомертиялык фигура, ж.б. эсептелет. Алар реалдуу дүйнөдөгү об'ектилер ээ болбогон касиеттер менен мүнөздөлүшөт. (Чекит– эч кандай өлчөмү жок фигура) Демек математикалык об'ектилер биздин аң-сезимибизге гана ар түрдүү шарттуу белги жана символдор жашайт.

Бирок математиканын абстракттулугу анын башка илимдердин ар түрдүү тармактарында колдонулушуна мүмкүнчүлүк берет. Ошондуктан математика– жаратылышты окуп билүү жана техникалык процесс үчүн табылгыс чоң курал болуп эсептелинет.

Турмушта айрым обьектилер жөнүндө гана эмес алардын класстары (топтору) да кездешет. Алардын класстарга бириктирилиши алардын айрым окшоштугу бар экендиги менен мүнөздөлөт. Алар: сүт эмүүчүлөр, суюктук, таштар, студенттер, ж.б.

Ар кандай математикалык обьект бир топ белгилүү касиеттерге ээ. Мисалы, квадраттын төрт бурчу, төрт жагы бар, диагоналдары барабар, ж.б. Обьектинин касиеттери 2 топко бөлүнөт: маанилүү жана манилүү эмес (существенный, несущественный). Ал касиеттер берилген об'ектини башка обьектилерден болгон өзгөчөлүктөрүн көрсөтөт. Эгер ал касиетсиз, аны башка об'ектилерден айырмалап көрсөтүүгө мүмкүн болбосо, анда ал касиет маанилүү касиет болот. Мисалы жактарынын барабар болушу квадрат үчүн маанилүү касиет болот. Эгерде тигил же бул касиет обьектинин жашоосу үчүн таасири жок болсо, анда маанилүү эмес. Мисалы трапеция үчүн анын негиздери горизонталдык болушу анчалык маанилүү эмес.

Демек берилген об'екти жөнүндө так маалымат болушу үчүн анын маанилүү касиеттери берилиши зарыл. Бул учурда берилген обьекти жөнүндө түшүнүк берилди деп айтышат.

Адамзаттын аң сезиминин өнүгүшүнүн алгачкы этабында айрым об'ектилер жөнүндө жөнөкөй түшүнүктөр (таш, алма, терек ж.б.), ал эми коомдун улам өсүп өнүгүшү бара-бара кеңири, жалпы түшүнүктөр (өсүмдүк, жаныбар, геометриялык фигура, ж.б.), пайда болгон. Илим изилдөө иштери үчүн абстракттуу түшүнүктөр мүнөздүү. Мисалы: масса, күч, энергия, материал, сан, ж.б.

Түшүнүктөр негизги жана туунду болуп эки түрдүү болушат.

Негизги түшүнүк– бул башка түшүнүктөрдөн келип чыкпаган алгачкы түшүнүк болот. Ага эч кандай аныктоо берилбестен, ал жөнүндө түшүндүрмө, маалыматтар гана берилет. Мисалы: чекит, түз сызык, тегиздик, көптүк, натуралдык сан, ж.б. Ал эми туунду түшүнүк ага чейин белгилүү болгон негизги түшүнүктөр же касиеттер аркылуу аныкталат. Мисалы: үч бурчтук, жуп сан, толуктоочу көптүк, шар, ж.б.

Ар бир түшүнүктүн өзүнө жараша көлөмү болот, ал ошол түшүнүк камтылган нагыз (нактай) об'ектилердин жыйындысы. Мисалы, китеп түшүнүгүнүн көлөмү–дүйнө жүзүндөгү мурдагы, азыркы жана келечектеги китептердин көптүгү.

Эгер бир түшүнүктүн көлөмү экинчи бир түшүнүктү камтыса, анда биринчи түшүнүк экинчи түшүнүктүн жалпы учуру, ал эми экинчи түшүнүк биринчинин айрым учуру болот. Мисалы, «сүт эмүүчүлөр», жалпы түшүнүк, ал эми «адам» анын айрым бир учуру болот.

Об'ектинин өз ара байланышта болгон бардык касиеттеринин жыйындысы ал об'екти жөнүндө түшүнүктүн <u>мазмунун</u> түзөт.

Түшүнүктүн мазмунун ачып көрсөтүүчү логикалык операция ал түшүнүктүн <u>аныктоосу</u> деп аталат.

Ар кандай туунду түшүнүккө аныктоо берүү үчүн

1. анын түпкү тегин көрсөтүү керек;
2. анын өзүнө гана тиешелүү болгон маанилүү касиеттерин тактоо керек.

Мисалы:

А) Параллелограммдын аныктоосу:
«Карама-каршы жактары параллель болгон төрт бурчтук параллелограмм деп аталат».

Бул аныктоодо

- бул түшүнүктүн түпкү теги төрт бурчтук экендиги;
- анын маанилүү мүнөздөөчү касиети – карама-каршы жактары параллель экендиги көрсөтүлүп жатат.

Б) Жөнөкөй сандардын аныктоосунда «Бирге жана өзүнө гана бөлүнгөн натуралдык сандар жөнөкөй сандар деп аталат».
Мында;

- жөнөкөй сандын түпкү теги– натуралдык сан экендиги;
- мүнөздөөчү касиети– бирге жана өзүнө гана бөлүнөөрү айтылган.

Аныктоолор математикада эки түрдүү ачык жана ачык эмес болушат (явные и неявные). Ачык аныктоолор эки түшүнүктүн теңдөө же дал келтирүү формасында болот. Мисалы, «жактары барабар болгон тик бурчтук квадрат деп аталат» деген аныктоосу ачык аныктоо болот. Мында биринчи «квадрат» деген түшүнүк ага тең маанилеш болгон экинчи бир «жактары барабар болгон тик бурчтук» деген түшүнүк аркылуу такталууда.

Мындай аныктоолорго катышкан түшүнүктөр аныкталуучу жана аныктоочу болушат. Жогорку мисалда квадрат түшүнүгү аныкталуучу түшүнүк болот. Аныктоочу аныкталуучу түшүнүктүн мазмунун ачып көрсөтөт. Б.а., квадрат болуш үчүн ал төрт бурчтуктун жактары барабар жана анын тик бурчтук болушу зарыл экендиги айтылат.

Ачык эмес аныктоолор жогорку теңдештирүү формасында болбойт. Ага мисал болуп контекстүү жана остенсивдүү аныктоолор эсептелишет.

Контекстүү аныктоолордо жаңы түшүнүктүн мазмуну аныкталуучу түшүнүктүн мазмуну талданып көрсөтүлгөн кыскача текст (контекст) аркылуу берилет. Мисалы, башталгыч класстардын программасында «теңдеме» жана «теңдемени чыгаруу (тамырын табуу)» түшүнүктөрү конкреттүү төмөнкүчө берилет: $3+x=9$ жана 2,3,6,7 сандарынан кийин төмөнкүдөй текст кетет: «x– бул белгисиз сан. Барабардык туура болуш үчүн берилген сандарды x тин ордуна коюу керек. Ал сан 6». Бул текстен «теңдеме– бул белгисизди кармап турган барабардык, аны чыгаруу– теңдемени туура барабардыкка айландырган x тин сан маанисин табуу» деген корутунду чыгарышат.

Жаны түшүнүктү остенсивдүү аныктоодо ошол түшүнүккө (терминге) ээ болгон об'екти көрсөтүлөт (демонстрацияланат).

Мисалы, башталгыч класстарда барабардык жана барабарсыздык түшүнүктөрү төмөнкүчө тааныштырылат:

$$\left.\begin{array}{l} 5+2=7 \\ 3\cdot4=4\cdot3 \\ 20-2=3\cdot6 \end{array}\right\} \text{– барабардыктар}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5+2>4 \\ 60+2<75-3 \\ 45+2>45-2 \end{array}\right\} \text{– барабарсыздыктар}$$

деп көрсөтүп, аталыштары менен окуучуларды тааныштырып коюшат.

Ошондой эле математикада **индуктивдүү** же **рекуренттүү** формула аркылуу аныкталат. Мисалы, мектеп курсунда арифметикалык прогрессияны төмөнкүдөй формула аркылуу аныктоого (берүүгө) болот: $a_n=a_{n-1}+d$, $n\geq2$

Коомдун, илимий-техникалык прогресстин өсүп-өнүгүшү айрым түшүнүктөрдүн аныктоосунун мазмунун да өзгөртүшү мүмкүн. Мисалы, «атом» түшүнүгү байыркы мезгилде «бөлүнбөс эң майда бөлүкчө» деп аныкталса, азыр мындай аныктоо туура эмес.

Түшүнүктөрдүн аныктоолоруна төмөнкүдөй негизги талаптар коюлат:

1. Аныкталуучу жана аныктоочу түшүнүктөрдүн өлчөмдөрү бирдей (соразмерные) болуш керек, б.а. алар камтылган обьектилердин көптүктөрү дал келиши керек. Мисалы, «тик бурчтук» жана «бурчтары тик болгон төрт бурчтук» түшүнүктөрдүн өлчөмдөрү бирдей. Ал эми «параллель түз сызыктар» жана «жалпы чекитке ээ болбогон түз сызыктар» деген түшүнүктөрдүн өлчөмдөрү бирдей эмес. Себеби, экинчи түшүнүктүн көлөмүнө кайчылаш түз сызыктар да кирип кетет.
2. Аныкталуучу жана аныктоочу түшүнүктөр көлөмүнө бирин экинчиси, ошол эле учурда экинчиси биринчисин аныктабашы керек.

   Мисалы, «Айлана– бул тегеректин чеги» жана «Тегерек– айлана менен чектелген тегиздиктин бөлүгү» деген аныктоолордун берилиши туура эмес. Мында айлана тегерек аркылуу, ал эми тегерек айлана аркылуу аныкталып жатат. Айлананын аныктоосу берилген чекиттен бирдей аралыкта жаткан тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду катары аныкталышы керек.

3. Аныктоодо аныкталуучу түшүнүктүн көлөмүнө тиешелүү болгон бардык обьектилерди бир маанилүү көрсөткөн бардык мүнөздүү касиеттер көрсөтүлүшү керек. Мисалы, «бурчтарынын суммасы

180^0 ка барабар болгон бурчтар жандаш бурчтар деп аталат» десек, анда алардын жактары жөнүндө касиет айтылбастан, ал түшүнүктүн көлөмүнө жандаш эмес бурчтар да кошулуп кетет.

4. Түшүнүктүн аныктоосу так жана кыска болуусу ашыкча талкуу, касиеттерди камтыбашы керек. Мисалы, «карама-каршы жактары параллель жана барабар болгон төрт бурчтук параллелограмм деп аталат» деген аныктоодо жактарынын барабар болушу ашыкча берилген касиет болот. Алардын барабардыгы барабар болушу аныктоодон жана үч бурчтуктардын барабардыгынан келип чыгышы белгилүү. Б.а жактарынын барабар болушу берилген төрт бурчтуктун параллелограмм болушу үчүн зарыл шарты эмес жетиштүү гана шарты болот.

2. Айтылыштар жана алар менен жүргүзүлүүчү операциялар.

Практикада белгилүү бир ойду билдирген ар түрдүү жай сүйлөмдөр кездешет. *Мисалы:*

а) Бүгүн кар жаады.
б) Бермет $3^а$-классында окуйт.
в) 27 саны 5 ке бөлүнөт.
г) Волга дарыясы Каспий деңизине куят
д) Кайын-мөмөлүү дарак.

Бул сүйлөмдөр мазмуну боюнча ар түрдүү болгону менен алардын жалпы окшоштук жагы бар. Ал окшоштук- алардын чын (туура) же жалган (туура эмес) экендиги жөнүндө ачык айтууга болот. б.а. 1,2,4 сүйлөмдөр чын, ал эми 3,5 сүйлөмдөр жалган.

Аныктоо: Чын же жалган экендигин айтууга мүмкүн болгон ар кандай жай сүйлөм **айтылыш** деп аталат.

Айтылыштар латындын баш тамгалары A,B,C,D,E... (тамгалары) менен белгиленет.

Суроолуу жана илептүү сүйлөмдөр («Бүгүн жуманын кайсы күнү?», «Жашасын элдердин достугу!») айтылыш болушпайт, себеби алардын чын, же жалган экендиги жөнүндө ачык айтууга мүмкүн эмес.

Ошондой эле белгисизди кармап турган сүйлөмдөр да («x саны 2 ге бөлүнөт», «x жана y деген студенттер жердеш») айтылыш боло алышпайт, анткени алар белгисизден кээ бир маанилеринде чын, башка маанилеринде жалган айтылыштарды пайда кылышат.

Айтылыштар түзүлүшү (составы) боюнча **жөнөкөй** жана **курама** болуп эки түрдүү болушат. Эгер айтылышты башка айтылыштарга ажыратууга мүмкүн болбосо же ал бир гана ойду билдирген жөнөкөй жай сүйлөм болсо, анда ал жөнөкөй айтылыш болот. Мисалы:

а) Ар кандай квадрат тик бурчтуу болот
б) 25+15=40
в) Жөнөкөй сандардын көптүгү чексиз.
г) Бишкек– Кыргыз Республикасынын борбору.

A	$\overline{A}$
ч	ж
ж	ч

Эгер айтылыш эки же андан ашык жөнөкөй айтылыштардан куралса, анда ал курама айтылыш болот. Алар «жана», «же», «эгер ... болсо, ... болот», «... болгондо гана ... болот», Мисалы:

а) 15 саны 3 кө жана 5 ке бөлүнөт.
б) 45 жуп же так сан
в) Эгер окуучу сабакка жакшы даярданса анда ал «5» деген баа алат.
г) Эгер жаныбар эки буттуу болсо, анда ал ит эмес.

Демек, айтылыштар менен ар түрдүү операцияларды аткарууга болот б.а.

3. Айтылыштардын тануусу.

Эгер A айтылышы берилсе, анда ага карама-каршы болгон A айтылышынын тануусу деп аталган жаңы айтылышын алабыз. Ал $\overline{A}$ («A эмес» же «A экендиги туура эмес») деп белгиленет.

Аныктоо: A айтуусунун тануусу деп, A чын болгондо жалган болгон, A жалган болгондо чын болгон $\overline{A}$ айтуусун айтабыз.

Мисалы: эгер A - «24 саны 3 кө бөлүнөт» деген айтылыш болсо, анда анын тануусу $\overline{A}$– «24 саны 3 кө бөлүнбөйт» же «24 саны 3 кө бөлүнөрү жалган (туура эмес)» болот. Демек, A– чын айтылыш болсо, анын тануусу $\overline{A}$ жалган болот. Эгер B– жалган болсо, анда $\overline{B}$ – чын болот.

Мисалы: B– «$5^2=30$» болсо, анда $\overline{B}$ – «$5^2\neq30$». Демек, кандайдыр бир айтылыш чын болсо, анда анын тануусу жалган жана тескерисинче болот. Бул корутундуну таблица түрүндө жазсак:

A	$\overline{A}$
ч	ж
ж	ч

Бул айтылыштын тануусунун чындык маанилеринин таблицасы.

A айтылышынын тануусунун тануусу кош тануу деп аталат жана $\overline{\overline{A}}$ деп белгиленет. Мисалы:

A– «29 саны жөнөкөй сан»

$\overline{A}$ – «29 саны жөнөкөй сан эмес»

$\overline{\overline{A}}$ – «29 саны жөнөкөй сан эмес деген туура эмес»

Эгер бул айтылыштардын чындык маанилеринин таблицасын түзсөк

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
ч	ж	ч
ж	ч	ж

A жана $\overline{\overline{A}}$ айтылыштары бир эле мезгилде же чын, же жалган болушат. Демек, алар **тең күчтүү** же **барабар** айтылыштар болот.

4. Айтылыштардын коньюнкциясы.

Жөнөкөй айтылыштардан «жана» байламтасы аркылуу курама айтылыш түзүүгө боло тургандыгы белгилүү. Мисалы, «Бегимай тартиптүү жана окуунун отличниги».

Аныктоо: Эки айтылыштын экөө тең чын болгондо гана чын, калган учурлардын бардыгында жалган болгон курама айтылыш берилген айтылыштардын коньюнкциясы деп аталат жана $A \wedge B$ («A жана B») деп белгиленет.

Аныктоого ылайык айтылыштардын коньюнкциясынын чындык маанилеринин таблицасы төмөнкүчө болот:

A	B	$A \wedge B$
ч	ч	ч
ч	ж	ж
ж	ч	ж
ж	ж	ж

«Коньюнкция» сөзү латындын conjunctio деген сөзүнөн келип чыгып, «бириктирем» деген маанини билдирет

Таблица түзүү жана мисалдар аркылуу айтылыштардын коньюнкциясы үчүн төмөнкү касиеттери орун аларына ишенүүгө болот:

1^0. Айтылыштардын коньюнкциясы коммутативдүү б.а. ар кандай A жана B айтылыштары үчүн $A \wedge B = B \wedge A$ болот. Чындыгында

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
Ч	Ч	ч	ч
Ч	Ж	ж	ж
Ж	Ч	ж	ж
Ж	Ж	ж	ж

Мисалы. A– «21 саны 3кө бөлүнөт»

B– «21 саны 7ге бөлүнөт» айтылыштары берилсе, анда алардын коньюнкциялары $A \wedge B$= «21 саны 3 кө жана 7 ге бөлүнөт», $B \wedge A$– «21 саны 7 ге жана 3 кө бөлүнөт» бирдей маанидеги айтылыштар болушат.

2^0. Айтылыштардын коньюнкциясы ассоциативдүү б.а. ар кандай A,B жана C айтылыштары үчүн

$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$ болот.

Бул курама айтылыштардын бирдей мааниде болушуна таблица түзүү жана мисалдар аркылуу ишенүүгө болот.

Айтылыштардын мындай касиети үч же андан ашык айтылыштардын коньюнкциясында кашааларды таштап коюуга мүмкүнчүлүк берүү менен, андагы жөнөкөй айтылыштардын бардыгы чын болгондо гана чын болушун берет.

3^0. Ар кандай A айтылышы үчүн $A\wedge\overline{A}$ курама айтылышы дайыма жалган болот. Таблица түзүү аркылуу бул касиеттин туура экендигин текшеребиз:

A	$\overline{A}$	$A\wedge\overline{A}$
ч	ж	ж
ж	ч	ж

Ошондой мисал келтирип көрсөк:

A– "15 саны так сан"

$\overline{A}$– "15 саны так сан эмес (жуп сан)"

Анда $A\wedge\overline{A}$ -"15 саны так жана жуп сан" айтылышы жалган экендиги анык.

Жогорку операциялардын жардамы менен $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\wedge B$ сыяктуу гана эмес $\overline{A}\wedge B$, $\overline{A\wedge B}$, $\overline{A}\wedge\overline{B}$, $(A\wedge\overline{B})\wedge C$ сыяктуу бир топ татаал айрылыштарды да түзүп, алардын чындык маанилерин аныктоого болот.

Мисалы: $(A\wedge\overline{B})\wedge\overline{C}$ айтылышынын чындык маанилеринин таблицасын түзгүлө

A	B	$\overline{B}$	C	$\overline{C}$	$A\wedge\overline{B}$	$(A\wedge\overline{B})\wedge\overline{C}$
ч	ч	ж	ч	ж	ж	ж
ч	ж	ч	ж	ч	ч	ч
ж	ж	ч	ж	ч	ж	ж

ж.б.у.с.

5. Айтылыштардын дизьюнкциясы.

Аныктоо: A жана B айтылыштарынын экөө тең жалган болгондо гана жалган, калган учурлардын бардыгында чын болгон курама айтылыш ал айтылыштардын **дизъюнкциясы** деп аталат жана $A\vee B$ (“A же B”) деп белгиленет.

Мисалы, A– “$7>5$” жана B– “$7=5$” айтылыштары берилсе, анда алардын дизъюнкциясы $A\vee B$– “$7\geq5$” (“жети чоң же барабар беш”) айтылышы болот.

“Дизъюнкция” деген сөз латындын “disjunctio” деген сөзүнөн алынган, кыргызча «айырмалайм», «бөлүп көрсөтөм» деген маанини билдирет.

Аныктоо боюнча анын чындык маанилеринин таблицасы төмөнкүчө болот:

A	B	$A\vee B$
ч	ч	ч
ч	ж	ч
ж	ч	ч
ж	ж	ж

Таблицанын тууралыгына мисалдар аркылуу оңой эле ишенүүгө болот.

Айтылыштардын дизъюнкциясы төмөнкү касиеттерге ээ:

1^0. Айтылыштардын дизъюнкциясы коммутативдүү б.а. A жана B айтылыштары үчүн

$A\vee B=B\vee A$ болот.

2^0. Айтылыштардын дизъюнкциясы ассоциативдүү б.а. ар кандай A, B жана C айтылыштары үчүн $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$ болот. Мындан $(A\vee B)\vee C=A\vee B\vee C$ деп жазууга болот.

3^0. Айтылыштардын дизъюнкциясы дистрибутивдүү, б.а. ар кандай A, B жана C айтылыштары үчүн $(A\vee B)\wedge C = (A\wedge C)\vee(B\wedge C)$– конъюнкциянын дизъюнкцияга карата болгон бөлүштүрүүчүлүк касиети жана $(A\wedge B)\vee C=(A\vee C)\wedge(B\vee C)$– дизъюнкциянын конъюнкцияга карата болгон бөлүштүрүүчүлүк касиети.

Бул касиеттин туура экендигине өткөн касиеттердей эле таблица түзүү жана мисалдар аркылуу ишенүүгө болот.

4^0. Ар кандай а айтылышы үчүн $A\vee\bar{A}$ курама айтылышы дайыма чын башкача айтканда,

A	$\bar{A}$	$A\vee\bar{A}$
ч	ж	ч
ж	ч	ч

5^0. Айтылыштардын тануусу, конъюнкциясы жана дизъюнкциялары үчүн төмөнкү барабардыктар дайыма аткарылат:

$$\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B}$$
$$\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}$$

Бул катнаштыктарды **Де Моргандын** (Шотландиялык математик жана логик, 1806-1871 ж.ж.) формуласы деп аташат. Алардын чын экендиги да таблица түзүү аркылуу далилденет.

6. Айтылыштардын импликациясы.

Эгер А: «36 саны жуп сан» жана В: «36 саны 2 ге бөлүнөт» деген жөнөкөй айтылыштар берилсе, анда жогоруда айтылгандай «Эгер ..., анда...» сөздөрүнүн жардамы менен «Эгер 36 саны жуп сан болсо, анда ал 2 ге бөлүнөт» деген курама айтылыш берилген айтылыштардын ***импликациясы*** болот жана А=>В («А болсо, В болот») деп белгиленет. Импликация деген сөз латындын *implicatio* («тыгыз байланыштырам») деген маанини билдирет. Мында А импликациянын ***шарты,*** ал эми В– ***корутундусу*** деп аталышат.

А=>В импликациясы А чын, В жалган болгондо гана жалган, калган учурлардын бардыгында чын болот б.а. анын чындык маанилеринин таблицасы төмөнкүчө болот:

А	В	А=>В
ч	ч	ч
ч	ж	ж
ж	ч	ч
ж	ж	ч

Импликациянын чын же жалган болушу жөнүндөгү мындай макулдашуу көп учурларда өтө ыңгайлуу жана математикада кеңири колдонулат.

Мисалы: А: «Тик бурчтуктун жактары барабар», ал эми В: «Тик бурчтук квадрат болот» деген айтылыштардан түзүлгөн импликация А=>В үчүн анын шарты – чын, корутундусу жалган болгон учурда гана жалган болот. б.а. «эгер тик бурчтуктун жактары барабар болсо, анда ал тик бурчтук квадрат эмес» импликациясы гана жалган болот.

Эки айтылыштын импликациясы тануу жана дизъюнкция операциялары менен туюнтулушу мүмкүн б.а. ар кандай А жана В айтылыштары үчүн (А=>В)=($\overline{A}$ ∨ В) болот.

Бул барабардыктын туура экендигине төмөнкү таблицаны түзүү менен ишенүүгө болот:

A	B	$\overline{A}$	A=>B	$\overline{A}\vee B$
ч	ч	ж	ч	ч
ч	ж	ж	ж	ж
ж	ч	ч	ч	ч
ж	ж	ч	ч	ч

Эгер A=>B импликациясы берилсе, анын шарты менен корутундусун орун алмаштыруу менен $\overline{B}$ =>A импликациясы пайда болот жана ал берилген импликацияга <u>тескери</u> импликация деп аталат. Мисалы: «Эгер сан жуп цифра менен аяктаса, анда ал 2 ге бөлүнөт» жана «Эгер сан экиге бөлүнсө, анда анын акыркы цифрасы жуп» деген импликациялар өз ара тескери.

Эгерде A жана B айтылыштарын алардын тануусу менен алмаштырса, анда пайда болгон Ā=> $\overline{B}$ импликациясы A=>B импликациясына ***карама-каршы*** импликация болот.

Эгерде A жана B айрылыштарын тануусу менен алмаштырып, бир эле мезгилде алардын орундары алмашылса, анда пайда болгон $\overline{B}$ =>Ā импликациясы берилген A=>B импликациясынын ***карама-каршысына тескери*** импликация болот. Таблица түзүү менен A=>B= $\overline{B}$ =>Ā экендигине ишенүүгө болот. Бул математикада ***контрапозиция*** закону деп аталат жана ар кандай импликацияга тең күчтүү импликацияларды түзүү үчүн (айрым теоремаларды тескерисинче далилдөө үчүн) колдонулат.

Ошондой эле B=>A=Ā=> $\overline{B}$ барабардыгын да далилдөөгө болот. Акырында A=>B импликациясынын тануусун кантип түзүү мүмкүнчүлүгүн карайлы. Жогорку таблица аркылуу A=>B=A∨B барабардыгы туура экендигине ишендик.

Мындан: $\overline{A=>B}=\overline{A}=B$ деп жазууга болот.

Анда Де Моргандын формуласы боюнча

$\overline{\overline{A}\vee B}=\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}=A\wedge\overline{B}$ болот.

Демек $\overline{A=>B}=A\wedge\overline{B}$ экендиги келип чыгат.

Акыркы корутунду да айрым математикалык сүйлөмдөрдү далилдөөгө мүмкүнчүлүк берет, башкача айтканда, A дан B айтылышы келип чыкпасын далилдөө үчүн A нын жана B нын жалган экендигин далилдөө жетиштүү.

7. Айтылыштардын эквиваленциясы. Тавтологиялар.

Эгерде A жана B айтылыштары берилсе, анда алардан жогоркулардан башкача болгон «A болгондо гана B болот» деген курама айтылыш түзүүгө болот. Ал A<=>B деп белгиленип, A жана B айтылыштарынын эквиваленциясы деп аталат. Башкача айтканда $A=>B\wedge B=>A=A<=>B$.

Айтылыштардын эквиваленциясы алардын экөө тең чын же экөө тең жалган болгондо гана чын, башка учурларда жалган болот. Чындык маанилеринин таблицасы

A	B	A<=>B
ч	ч	ч
ч	ж	ж
ж	ч	ж
ж	ж	ч

Мисалы:

А: «175 саны 3 кө бөлүнөт» жана В: «175 санындагы цифралардын суммасы 3 кө бөлүнөт» айтылыштары берилсе, анда төмөнкү эквиваленциялар гана чын болушат:

а) «175 саны анын цифраларынын суммасы 3 кө бөлүнгөндө гана 3 кө бөлүнөт».

г) «175 саны анын цифраларынын суммасы 3 кө бөлүнбөгөндө гана 3 кө бөлүнбөйт». Калган б) жана в) учурлары үчүн жалган.

Жогорку пункттарда ар кандай А, В жана С айтылыштарынан тануу, конъюнкция, дизъюнкция жана импликация операцияларынын жардамы менен жаңы ар түрдүү айтылыштарды түзүү мүмкүн экендигин көрдүк. Алардын арасында А жана В айтылыштарынын чын же жалган болушуна карабай бир эле мезгилде чын же, бир эле мезгилде жалган болгон курама айтылыштар бар экендиги аныкталды. Мисалы:

$A\wedge B$ жана $B\wedge A$ курама айтылыштары.

Жогорку жыйынтыкты эми башкача айтууга болот: «$A\wedge B<=>B\wedge A$ эквиваленциясы дайыма чын болот». Же жалпылап айтканда: «Эгер А жана В айрылыштары эквиваленттуу болсо, анда $A<=>B$ эквиваленциясы чын жана тескерисинче, $A<=>B$-чын болсо, анда $A=B$».

Аныктоо: Курамындагы жөнөкөй айтылыштардын ар кандай болушуна карабай дайыма чын болгон курама айтылыштар ***тавтологиялар*** деп аталышат.

Мисалы: $A\wedge B<=>B\wedge A$, $A\vee B<=>B\vee A$, $((A=>B)\wedge A)=>B$.

Булардын чын экендигине таблица түзүү менен ишенүүгө болот.

III ГЛАВА
Предикаттар жана теоремалар.

1. Бир орундуу предикаттар жана алар менен жүргүзүлүүчү операциялар.

Белгисиздерди кармап турган төмөнкү сүйлөмдөрдү карап көрөбүз:

1) «х деген студент математиканы жакшы окуйт».
2) «у деген жазуучу «Жамийла» повестин жазган».
3) «х+3>7»
4) «z саны 5ке бөлүнөт».
5) «Камыт пахтанын гектарынан х центнерден түшүм алды» ж.б.

Берилген сүйлөмдөрдүн бардыгы айтылыш боло алышпайт, себеби тигил же бул сүйлөмдүн чын, же жалган экендиги жөнүндө эч нерсе айтууга болбойт. Бирок, белгисиздин ордуна бир маани берсек ал сүйлөм чын айтылыш, ал эми экинчи маанисинде жалган айтылыш келип чыгат. Мисалы, «$x+3>7$» барабарсыздыгына 5 санын койсок, анда $5+3>7$ деген чын айтылыш, ал эми 2 санын койсок $2+3>7$ деген жалган айтылыш келип чыгат.

Ошондой эле экинчи сүйлөмдөгү y тин ордуна «Айтматов» деп жазсак чын, ал эми «Касымбеков» десек жалган айтылыш чыгары анык.

Аныктоо: Белгисизди кармап турган айтылыш предикат деп аталат. Алар математикада $A(x)$, $B(y)$, $C(x)$,... түрүндө белгиленет. Окулушу «x тен А» же «x тен А» же орус тилинде «А от x». (x тен көз каранды болгон А чоңдугу).

Белгисиздин саны бирөө болгондуктан мындай предикаттар бир орундуу предикаттар деп аталышат. Мисалы:

$A(x)$: «$2x-1=7$».

$B(y)$: «у шаары Кыргыз Республикасынын экинчи борбору».

$C(z)$: «z саны жөнөкөй сан».

Предикат түшүнүгү менен негизинен эки көптүк байланыштырылат:

1) X – аныкталуу областы (көптүгү) – берилген предикатты айтылышка айландыра ала турган белгисиздин бардык маанилеринин көптүгү.

2) Т –чындык маанилеринин көптүгү – берилген предикатты чын айтылышка айландыруучу белгисиздин бардык маанилеринин көптүгү. Мында $T \subset X$ экендиги көрүнүп турат.

Мисалы:

1) А(х): «х саны 5ке бөлүнөт» предикаты үчүн $X=N$ жана $T=\{5,10,15,20,25,\ldots\}$ (Эскертүү: Бул курсга сөз негизинен натуралдык сандардын көптүгүндө болот).
2) В(х) : «$x+5=7$»предикаты үчүн $X=R$, ал эми $T=\{2\}$ бирдик көптүгү болот.

Мында В(2) – чын айтылыш, ал эми В(3), В(15),... жалган айтылыштар.

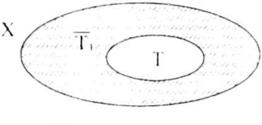
Бир эле Х көптүгүндө берилген А(х) жана В(у) предикаттары эквиваленттүү болушу да мүмкүн б.а. эгер алардын чындык маанилеринин көптүктөрү өз ара барабар болсо, анда алар эквиваленттүү предикаттар. Мисалы, А(х): «х натуралдык саны 3кө бөлүнөт» жана В(х): «х санынын цифраларынын суммасы 3кө бөлүнөт» предикаттары эквиваленттүү б.а. $A(x) \sim B(x)$. Себеби, алар экөөнө тең натуралдык сандардын көптүгүндө берилип, бир эле учурда чын же жалган айтылыш болушат.

Ошондой эле $2x-1=7$ жана $2x=8$ теңдемелери да эквиваленттүү предикаттар болушат. Себеби, алар $X=R$ көптүгүндө аныкталышып, $T_1=T_2=\{4\}$ болушат.

Предикаттар да айтылыштар сыяктуу эле жөнөкөй жана курама болушат. Курама предикаттар да мурдагы эле логикалык байламталардын жардамы менен түзүлүшөт.

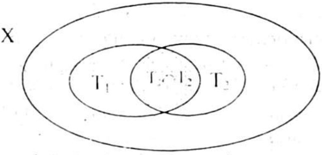
Эгер Х көптүгүндө А(х) предикаты берилсе, анда анын тануусу $\overline{A(x)}$ болот. Анын аныкталуу области болуп, ошол эле Х көптүгүнөн алынган жана А(х) предикатын жалган айтылышка айландырган белгисиз хтин маанилеринин гана көптүгү эсептелет.

Мисалы, $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$ көптүгүндө А(х): «х саны 6дан чоң» деген предикат берилсин. Анын чындык маанилеринин көптүгү $T=\{7,8,9,10\}$ болот. Анда берилген предикаттын тануусу А(х): «х саны 6 дан чоң эмес» предикатынын чындык маанилеринин көптүгү $T_1=\{1,2,3,4,5,6\}$ б.а. Т көптүгүн Х көптүгүнө чейин толуктоочу көптүк болот. Эгер бул көптүктөрдү Эйлер-Венндин диаграммалары аркылуу сүрөттөсөк төмөнкүдөй болот:



Эгер X көптүгүндө чындык маанилеринин көптүктөрү T_1 жана T_2 болгон $A(x)$ жана $B(x)$ предикаттары берилсе, анда алардын **коньюнкциялык** $A(x)\wedge B(x)$ предикатынын чындык маанилеринин көптүгү, алардын ар бири чын болгон Xтен алынган белгисиздин маанилеринин көптүгү болот. Андай көптүк $T=T_1\cap T_2$ экендиги анык.

Мисалы, $A(x)$: «x саны 7ден кичине» жана $B(x)$: «x саны жөнөкөй» предикаттары $X=\{1,2,3,\ldots,12\}$ көптүгүндө берилсин. Анда алардын коньюнкциясы $A(x)\wedge B(x)$: «x саны 7ден кичине жана жөнөкөй» предикатынын чындык маанилеринин көптүгү $T=T_1\cap T_2=\{2,3,5\}$ болот.



$T_1=\{1,2,3,4,5,6\}$
$T_2=\{2,3,5,7,11\}$

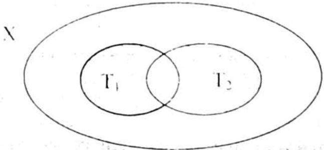
$A(x)\vee B(x)$ предикаты берилген предикаттардын дизьюнкциясы болот. Ал $A(x)$ жана $B(x)$ предикаттарынын жок дегенде бири чын болгон Xтен алынган белгисиздин маанилеринде чын болот б.а. эгер $T_1-A(x)$ предикатынын, ал эми T_2 $B(x)$ тин чындык көптүгү болсо, анда изделүүчү көптүк $T=T_1\cup T_2$ болот.

Мисалы, мектептеги окуучулардын көптүгү Xте $A(x)$: «x–мектептеги отличник окуучулар» жана $B(x)$: «x–мектептеги кыздар» предикаттары берилсе, анда алардын дизьюнкциясы $A(x)\vee B(x)$: «x–мектептеги отличниктер же кыздар» предикаты болот, анда

T1 – мектептеги отличник окуучулардын көптүгү.

T2 – мектептеги кыздардын көптүгү.

$T=T_1\cup T_2$– мектептеги отличниктердин же кыздардын көптүгү болот.

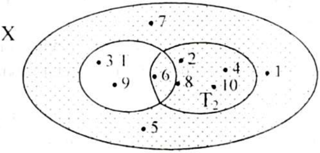


Кандайдыр бир X көптүгүндө $A(x)$ жана $B(x)$ предикаттары берилсе, анда алардын $A(x) > B(x)$ импликациясын түзүүгө да мүмкүн. Айтылыштардын импликациясынын аныктоосуна ылайык.

пайда болгон предикаттардын импликациясы A(x) чын, ал эми B(x) жалган болгон Хтен алынган белгисиздин маанилеринде чын болот.

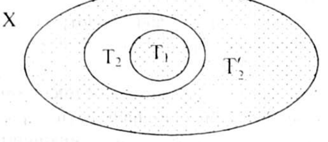
Мисалы, X={1,2,3,4,…,10} көптүгүндө A(x): «x саны 3кө бөлүнөт» жана B(x): «x саны жуп» предикаттары берилсин. Анда алардын импликациясы A(x)=>B(x): «x саны 3кө бөлүнсө, анда ал жуп сан болот». Анын чындык маанилеринин көптүгүн табабыз: T1={3,6,9} жана T2={2,4,6,8,10} экендиги анык.

Импликациянын аныктоосуна ылайык, пайда болгон импликация хтин 3 жана 9 деген маанилеринде жалган, ал эми калган маанилеринде чын болот. Б.а. T={1,2,4,5,6,7,8,10}– бул берилген импликациянын чындык маанилеринин көптүгү. Демек, $T=T2\cup T_1'$. Мында T_1' – T1 көптүгүн X көптүгүнө чейин толуктоочу көптүк.



Штрихтелген фигура A(x)=>B(x) импликациясынын чындык маанилеринин көптүгүнүн сүрөттөлүшү болот.

Практикада кээ бир предикаттын чын болушунан экинчи предикаттын чын экендиги келип чыга турган учурлар да кездешет. Мисалы, A(x): «x саны 4кө бөлүнөт» предикатынан B(x): «x саны 2ге бөлүнөт» деген предикат келип чыгат. Бул мисалдан A(x)=>B(x) предикаты жалган болгон $T1\cap T_2'$. көптүгү бош болгондо гана A(x) предикатынын чын болушунан B(x)тин чын экендиги келип чыгары көрүнүп турат. Бирок $T1\cap T_2'$. көптүгү $T1\subset T2$ болгондо гана бош көптүк болот.



Демек, A(x) => B(x) предикаты бардык x∈X үчүн A(x) предикатынын чындык маанилеринин көптүгү T1 B(x) предикатынын чындык маанилеринин көптүгү T2 ге камтылган учурда гана чын болот. б.а. T1⊂T2 болгондо гана.

Эгерде Хтен алынган бардык х үчүн A(x)=>B(x) предикаты чын болсо, анда B(x) предикаты A(x) предикатынан логикалык түрдө келип чыгат жана B(x) предикаты A(x) үчүн **зарыл шарт**, ал эми A(X) предикаты B(x) үчүн **жетиштүү шарт** болот деп айтышат.

Мисалы, A(x) =>B(x): «Эгер х саны натуралдык сан болсо, анда ал бүтүн сан болот» импликациясы берилсе B(x): «х саны бүтүн сан» предикаты A(x): «х саны натуралдык сан» предикатынан логикалык түрдө келип чыгат. Демек, A(x) предикаты B(x) үчүн жетиштүү шарт, ал эми B(x) предикаты A(x) үчүн зарыл шарт болот.

Жаңы терминдерди колдонуп A(x)=>B(x): «Эгер х саны натуралдык сан болсо, анда ал бүтүн сан болот» деген предикаты төмөнкүчө да айтууга болот:

1. х саны натуралдык сан болушу үчүн, анын бүтүн болушу зарыл.
2. х саны бүтүн сан болушу үчүн, анын натуралдык сан болушу жетиштүү.

Эгер X көптүгүндө берилген A(x) жана B(x) предикаттары эквиваленттүү болушса, б.а. алардын чындык маанилеринин көптүктөрү T1 жана T2 дал келсе (T1= T2), анда Хтен алынган бардык Хтер үчүн A(x)<=>B(x) эквиваленциясы чын болот.

Мисалы, натуралдык сандардын көптүгүндө A(x): «х натуралдык саны 10го бөлүнөт» жана B(x): «х натуралдык саны 0 цифрасы менен аяктайт» деген эквиваленттүү предикаттар берилсе, анда A(x)<=>B(x) эквиваленциясы бардык натуралдык сандар үчүн чын болот.

Бул корутундуну мисалдар аркылуу текшерип көрөлү:

а) эгер x=160 болсо, берилген эквиваленция чын болот, себеби A(160) жана B(160) айтылыштары чын.

б) эгер x=15 болсо да берилген эквиваленция чын болот, себеби A(15) жана B(15) айтылыштарынын экөө тең жалган.

Эгер X көптүгүндө берилген A(x) жана B(x) предикаттары эквиваленттүү болушса, анда алардын ар бири экинчиси үчүн зарыл жана жетиштүү шарт болот. Ошондуктан акыркы импликацияны төмөнкүчө айтууга болот: «х саны 10го бөлүнүшү үчүн анын акыркы цифрасынын 0 болушу зарыл жана жетиштүү».

2. Көп орундуу предикаттар.

Эки же андан ашык белгисиздерди камтыган предикаттар, көп орундуу предикаттар деп аталышат. Мисалы:

а) «x саны y ке бөлүнөт».

б) «x жана y деген балдар Z мектебинде окушат».

в) «x+y+z=1», ж.б.

Айталы, P(x,y) сүйлөмү эки белгисизди камтысын, мында x∈X, y∈Y болсун. (x;y) түгөйлөрү XxY декарттык көбөйтүндүсүнүн элементтери боло тургандыгы бизге белгилүү.

P(x,y) сүйлөмү эки орундуу предикат болот. (Белгисиздер үчөө болсо– үч орундуу, төртөө болсо– төрт орундуу, ж.б. болушат).

Берилген P(x,y) эки орундуу предикатын чын айтылышка айландырган (а;в) түрүндөгү түгөйлөрдүн көптүгү T анын чындык маанилеринин көптүгү деп аталат, ал XxY көптүгүнө камтылган көптүк болот.

3. Кванторлор.

Жөнөкөй сандардын көптүгүндө P(x): «x жөнөкөй саны жуп сан» деген предикаты берилсин. Эгер бул сүйлөмдүн башталышына «ар кандай» же «кээ бир» деген сөздөрдү коюп сүйлөмдөр түзсөк, анда жалган же чын айтылыштар пайда болот б.а.

а) «Ар кандай жөнөкөй сан жуп сан болот».

б) «Кээ бир жөнөкөй сандар жуп».

Демек, берилген предикаттан андагы белгисизге конкреттүү маани берүү менен гана эмес, анын башталышына «ар кандай», «бардык», «кээ бир», «айрым», «жашайт», «бар болот» ж.б. сыяктуу сөздөрдү коюу менен да айтылыштарды пайда кылууга мүмкүн экен.

Бул сөздөр логика илиминде кванторлор деп аталышат.

Практикада эки түрдүү кванторлор: **жалпылыктын** квантору жана **жашоонун** квантору кездешет.

Кандайдыр бир X көптүгүндө P(x) предикаты берилсин. Анын башталышына «бардык» деген сөздү коюп сүйлөм түзсөк, «x∈X» болгон бардык x тер үчүн P(x) предикаты аткарылат» деген сүйлөм пайда болот. Ал сүйлөмдү шарттуу түрдө (∀x∈X) P(x) деп жазышат.

∀ белгиси ALL деген англис сөзүнүн биринчи тамгасынын оодарылып жазылышы. ALL сөзү кыргызча «бардык» деген мааниде. Ал сөздүн ордуна кээде «ар кандай» деген сөз да колдонулат, бул сөздөр жалпылыктын кванторлору.

Ошол сыяктуу эле анын башталышына «кээ бир», «айрым», «бар болот», «жашайт» сыяктуу сөздөрдү коюу менен сүйлөм түзсөк:

«P(x) предикаты аткарыла турган X көптүгүнөн xтер табылат (бар) «же «X көптүгүнөн алынган кээ бир x тер үчүн P(x) аткарылат» деген айтылыштар пайда болот жана $(\exists x \in X)$ P(x) деп жазылат.

$\exists$ белгиси «Exist» («жашайт») деген англис сөзүндөгү баш тамганын оодарылып жазылганы.

Мисалы, N натуралдык сандардын көптүгүндө P(x): «x саны 5ке бөлүнөт» деген предикат берилсе, анда $(\forall x \in N)$ P(x) сүйлөмү төмөнкүчө айтылыштарды берет:

1. «Ар кандай натуралдык сан 5ке бөлүнөт».
2. «Бардык натуралдык сандар 5ке эселүү».
3. «Каалаган натуралдык сан 5ке бөлүнөт».

Булар үчөө тең жалган айтылыштар экендиги көрүнүп турат. Ал $(\exists x \in N)$ P(x) сүйлөмдөрү

1) «Кээ бир натуралдык сандар 5ке бөлүнөт».
2) «5ке бөлүнө турган натуралдык сандар бар».
3) «5ке бөлүнө турган жок дегенде бир натуралдык сан табылат»– чын айтылыштар болушат.

Кванторлор көп орундуу предикаттар үчүн да пайдаланылат. Мисалы, P(x,y): «x+y=y+x» предикаты натуралдык сандардын көптүгүндө берилсе, анда $(\forall x \in N)$ $(\forall y \in N)$ P(x,y) сүйлөмү «Ар кандай x жана y натуралдык сандары үчүн «x+y=y+x» деген чын айтылышын берет.

4. Теорема жана анын түзүлүшү. Түрлөрү.

Айтылыштар, предикаттар жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү операциялар бир топ корутундулардын логикалык структурасын ачып көрсөтүүгө мүмкүнчүлүк берет. Ага ар түрдүү логикалык шарттуу белгилерди (символдорду) колдонуу да шарт түзөт.

Математикада теорема деп аталуучу ар түрдүү сүйлөмдөрдү кездештирүүгө болот. Алар алгебрада, геометрияда жана башка математиканын бөлүмдөрүндө көп учурайт. Бирок, алар кандай гана мүнөздө болбосун, ал айтылыштардын чын экендигин далилдөө зарыл.

Математикалык логиканын түшүнүктөрүн пайдаланып, төмөнкү теоремалардын түзүлүштөрүн (структурасын) карап көрөлү:

1. «Эгер натуралдык сандын цифраларынын суммасы 3кө бөлүнсө, анда ал сан 3кө бөлүнөт» деген көптүгүндө берилген $A(x)$: «x санынын цифраларынын суммасы 3кө бөлүнөт» жана $B(x)$: «x саны 3кө бөлүнөт» жана $B(x)$: «x саны 3кө бөлүнөт деген предикаттардын жардамы менен $A(x)=>B(x)$ ден жазылат». Бирок, бул импликация ар кандай натуралдык сан үчүн чын болгондуктан, берилген теореманы жалпылыктын кванторун пайдаланып $(\forall x\in N)$ $(A(x)=>B(x))$ деп жазууга болот. Окулушу «Ар кандай x натуралдык саны үчүн $A(x)$ болсо, анда $B(x)$ болот».
2. «Эгер чекит бурчтун биссектрисасында жатса, ал анда жактарынан бирдей аралыкта турат» деген теорема берилсин. M– тегиздиктеги чекиттердин көптүгүндө берилген $A(x)$: «x чекити бурчтун биссектрисасында жатат» жана $B(x)$: «x чекити бурчтун жактарынан бирдей алыстыкта турат» предикаттарын пайдаланып, аталган теорема $(\forall x\in N)$ $A(x)=>B(x)$ түрүндө шарттуу белгилердин жардамы менен жазылат.

Демек, ар кандай теореманын структурасы теореманын шартынан, корутундусунан жана түшүндүрмө бөлүгүнөн тургандыгы көрүнүп турат б.а.

шарты– импликациянын шарты $A(x)$,

корутундусу– импликациянын корутундусу $B(x)$,

түшүндүрмө бөлүгү– теоремага катышкан обьектилердин мүнөздөмөлөрү (акыркы теореманын түшүндүрмө бөлүгү- $\forall x\in M$ («M– көптүгүнөн алынган ар кандай x чекити үчүн»).

Айрым теоремалардын түзүлүшүндө «эгер... болсо, анда... болот» деген сөздөр айтылбайт. Мисалы, «Ромбанын диаганалдары өз ара перпендикуляр» деген теоремада аталган сөздөр көмүскөдө калып, теореманын шарты жана корутундусу ачык бөлүнбөй калган. Ошондой болсо да теореманын мазмунун «эгер төрт бурчтук ромб болсо, анда анын диаганалдары өз ара перпендикуляр болушат» деп жогоркуга тең күчтүү айтылыш менен алмаштырып түшүнүүгө болот. Мында, теореманын шарты– $A(x)$: «x төрт бурчтугу– ромб», корутундусу– $B(x)$: «x төрт бурчтугунун диаганалдары өз ара перпендикуляр», ал эми түшүндүрмө бөлүгү– «x – тегиздиктеги төрт бурчтуктардын көптүгү» Xтен алынган каалаган төрт бурчтук.

Эгерде $(\forall x\in X)(A(x)=>B(x))$ кандайдыр бир чын (*далилденген*) теорема болсо, анда анын шарты жана корутундусу Xтен алынган ар кандай x үчүн чын болгон импликацияны пайда кылышат. Демек, $B(x)$ предикаты $A(x)$ предикатынан логикалык түрдө келип чыгат. Ошондуктан корутунду B(x) предикаты A(x) үчүн зарыл шарт, ал эми шарты A(x) корутунду B(x) үчүн жетиштүү шарт болот. Акыркы терминдерди пайдаланып «Ромбанын диаганалдары өз ара перпендикуляр» деген теореманы төмөнкүчө айтууга болот:

1. Төрт бурчтук ромб болуш үчүн анын диаганалдары өз ара перпендикуляр болушу зарыл.
2. Төрт бурчтуктун диаганалдары өз ара перпендикуляр болсун үчүн ал төрт бурчтуктун ромб болушу жетиштүү.

Илимде «зарыл шарт», «жетиштүү шарт» деген терминдердин ордуна «зарылдык белги», «жетиштүүлүк белги» же жөн гана «белги», деген сөздөр колдонулушу мүмкүн. Мисалы, «эгер сандын цифраларынын суммасы 3кө бөлүнсө, анда ал сан да 3кө бөлүнөт» деген теореманы 3кө бөлүнүүчүнүн белгиси деп аташат.

5. Тескери теорема.

«Натуралдык сандын цифраларынын сумммасы 9га бөлүнсө, анда ал сан да 9га бөлүнөт» деген теорема (9га бөлүнүчүүлүктүн белгиси) берилсе, анда анын составдык бөлүктөрү: A(x): «Натуралдык сандын цифраларынын суммасы 9га бөлүнөт», B(x): «Натуралдык сан 9га бөлүнөт» болот. Анын шарттуу белгилер аркылуу жазылышы $(\forall x \in N)(A(x) => B(x))$ экендиги белгилүү.

Мында теореманын шарты A(x), корутундусу B(x), ал эми түшүндүрмө бөлүгү $\forall x \in N$.

Берилген теореманын түшүндүрмө бөлүгүн өзгөртүүсүз калтырып, шарты менен корутундусун алмаштырсак $(\forall x \in N)$ $(B(x) => A(x))$ теоремасы пайда болот. Бул теореманы берилген теоремага тескери теорема деп айтышат б.а. X көптүгүндө берилген A(x) жана B(x) предикаттары берилсе $(\forall x \in X)(A(x) => B(x))$ жана $(\forall x \in X)(B(x) => A(x))$ теоремалары өз ара тескери теоремалар болушат. Бул аныктамадан жогорку теоремалардын каалаганы түз теорема болот.

Мисалы, жогоруда аталган теорема түз теорема болсо, анда анын тескериси «эгер натуралдык сан 9га бөлүнсө, анда анын цифраларынын суммасы да 9га бөлүнөт» деген теорема болот.

Бул аталган өз ара тескери теоремалардын экөө тең чын айтылыштар. Бирок, дайыма эле ушундай боло бербейт. Мисалы: «эгерде төрт бурчук тик бурчтук болсо, анда анын диаганалдары конгруэнттүү» деген чын теореманын тескериси «эгер төрт бурчтуктун диаганалдары конгруэнттүү болсо, анда ал төрт бурчтук тик бурчтук болот» жалган айтылыш болот. Себеби, диагоналдары конруэнттүү болгон төрт бурчтуктардын тик бурчтук болбогондору да бар.

Эгер $(\forall x\in X)(A(x)=>B(x))$ жана $(\forall x\in X)(B(x)=>A(x))$ теоремаларынын экөө тең чын болсо, анда аларды $(\forall x\in N)$ $A(x)<=>B(x))$ эквиваленциясы түрүндө жазууга болот (себеби, $T1\subset T2$ жана $T2\subset T1$ болгондуктан $T1=T2$). Бул учурда $A(x)$ жана $B(x)$ предикаттары бири экинчиси үчүн зарыл жана жетиштүү шарт болушат. Мисалы, жогорку теореманы төмөнкүчө айтууга болот: «Натуралдык сан 9га бөлүнүшү үчүн, анын цифраларынын суммасы 9га бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү» жана тескерисинче.

6. Карама-каршы теорема.

Эгер $(\forall x\in X)(A(x)=>B(x))$ теоремасындагы $A(x)$ жана $B(x)$ предикаттарын алардын тануулары менен алмаштырсак $(\forall x\in X)(\overline{A(x)}=>\overline{B(x)}$ деген жаңы,теорама келип чыгат. Бул берилген теоремага карама-каршы теорема болот. Мисалы, натуралдык сандардын көптүгүндө «эгер натуралдык сандын акыркы цифрасы нөл болсо, анда ал 5ке бөлүнөт» деген теоремага «эгер натуралдык сандын акыркы цифрасы нөл эмес болсо, анда ал 5ке бөлүнбөйт» деген теорема карама-каршы теорама болот. Эгер туз теорама чын болсо, анда анын карама-каршысы же чын же жалган болушу мүмкүн. Келтирилген мисалдагы карама-каршы теорема жалган. Себеби, нөл менен аяктабаган сандардын 5ке бөлүнгөндөрү да бар (5,15,25,35,…).

Карама-каршы теоремадагы шарт жана корутундулардын ордуларын алмаштырсак $(\forall x\in X)(\overline{B(x)}=>\overline{A(x)}$ деген **тескериге карама-каршы** теорема келип чыгат. Мисалы, «эгер натуралдык сан 5ке бөлүнбөсө, анда анын акыркы цифрасы ноль эмес» деген теорема, «эгер натуралдык сан 5ке бөлүнсө, анда анын акыркы цифрасы нөл» деген теоремага карама-каршы. Ал эми акыркы теорема «эгер натуралдык сан нөл цифрасы менен аяктаса, анда ал 5ке бөлүнөт» деген теоремага тескери.

$(\forall x\in X)(A(x)=>B(x))$ теоремасы менен $(\forall x\in X)(\overline{B(x)}=>\overline{A(x)})$ теоремасы тең күчтүү б.а. $(\forall x\in X)(A(x)=>B(x))$ теоремасы $(\forall x\in X)(\overline{B(x)}=>\overline{A(x)})$ чын болгондо гана чын болот. Бул факт айрым теоремаларды **контрапозиция** методу менен далилдөө үчүн негиз болот. Ал методдун мазмуну:

$(\forall x\in X)(A(x)=>B(x))$ теоремасын чын экендигин далилдөө үчүн, тескериге карама-каршы болгон $(\forall x\in X)(\overline{B(x)}=>\overline{A(x)})$ теоремасынын чын экендигин далилдешет.

Мисалы, «эгер эки түз сызык үчүнчү бир түз сызык менен параллель болушса, анда алар өз ара параллель» теоремасын контроппозиция методу менен далилдейли. Анын жазылышы $(\forall x \in X)(\forall yx \in X)(A(x,y) => B(x,y))$. Мында X– тегиздиктеги түз сызыктардын көптүгү, A(x,y): «x жана y түз сызыктары с түз сызыгына параллель; B(x,y): «x жана y түз сызыктары параллель».

Айталы B(x,y) предикаты жалган б.а. x түз сызыгы y түз сызыгына параллель эмес. Анда алар кандайдыр бир M чекитинде кесилишет. M чекити аркылуу C түз сызыгына параллель болгон эки түз сызык өткөн болот– бул параллелдүүлүктүн аксиомасына каршы келет. Демек, x жана y түз сызыктары параллель эмес деген туура эмес б.а. алар өз ара параллель болушат.

Демек, теоремалардын түрлөрү төмөнкүдөй болушат:

$A(x) => B(x)$ - түз теорема

$B(x) => A(x)$ - тескери теорема

$\overline{A(x)} => \overline{B(x)}$ - карама-каршы теорема

$\overline{B(x)} => \overline{A(x)}$ - карама-каршыга тескери теорема

IV ГЛАВА

Туура келүүчүлүктөр, катнаштыктар жана чагылыштар.

1. Бинардык туура келүүчүлүктөр.

Көптүктөр теориясын практикалык маселелерди чечүүгө пайдалануу жана айрым математикалык теорияларды түзүү үчүн элементтеринин ортосунда кандайдыр байланыш бар болгон көптүктөрдү кароого туура келет.

Аныктоолорду берүүдөн мурда төмөнкү мисалды карап көрөлү:

Группадагы студенттердин көптүгүндөгү элементтердин ортосунда «а студенти в менен жердеш», же «а жана в студенттери март айында төрөлүшкөн», же «а менен в математика кружогуна катышат» ж.б. сыяктуу байланыштар бар экендиги белгилүү. Бул учурда бир эле көптүктүн элементтеринин өз ара байланышы жөнүндө сөз болду. Ушул сыяктуу эле байланыштар ар түрдүү көптүктөрдүн элементтеринин ортосунда да болушу мүмкүн. Мисалы, студенттердин жана спорттун түрлөрүнүн көптүктөрүн алсак, анда алардын элементтеринин ортосунда «Сыдык волейболду жакшы ойнойт», же «Акен гимнастика боюнча спорттун чебери» ж.б. сыяктуу байланыштар бар.

Көптүктөрдүн элементтеринин ортосундагы мындай байланыштарды математикада **туура келүүчүлүктөр** деп аташат, алар көпчүлүк илимдердин куралышына жана өнүгүшүнө чоң негиз болушат. Эгер бир эле көптүктүн элементтеринин ортосундагы байланыш каралса, анда ал туура келүүчүлүк деп аталбастан ошол көптүктүн элементтеринин ортосундагы **катнаштык** деп айтышат.

Эгер эки эле көптүктүн элементтеринин ортосундагы туура келүүчүлүк берилсе, анда аны **бинардык** туура келүүчүлүк деп аташат. «Бинардык» деген сөз латындын bis деген сөзүнөн алынып, «эки жолу» деп которулат да, эки гана көптүк жөнүндө сөз болгондугун билдирет.

Жогорку мисалда көрүнгөндөй ар кандай бинардык туура келүүчүлүк $R(x,y)$ түрүндөгү эки орундуу предикат аркылуу берилет. Мында x белгисизи X көптүгүнөн, ал эми y болсо Y көптүгүнөн тиешелүү маанилерди кабыл алат.

Жалпысынан алганда, X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы туура келүүчүлүк деп төмөнкү үч көптүк аталат: X көптүгү, Y көптүгү жана $X\times Y$ декарттык көбөйтүндүгө камтылган Γ көптүгү. ($\Gamma\subset X\times Y$)

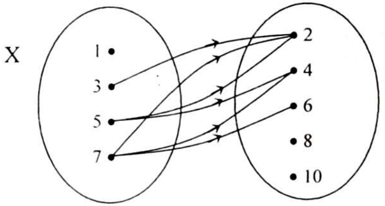
жана R,S,Q,P,T ж.б. тамгалары менен белгиленет. Мында X− туура келүүчүлүктүн узатуучу областы, Y− туура келүүчүлүктүн кабыл алуучу областы, Г⊂XxY− туура келүүчүлүктүн графиги деп аталышат. Жазылышы: xRy же xSy, xQy, xPy, xTy ж.б.

Окулушу: «X көптүгүнөн алынган x элементке Y көптүгүнөн y элементи туура келет».

Мисалы, X={1,3,5,7} жана У={2,4,6,8,10} көптүктөрүнүн ортосунда R «x саны y тен чоң» деген туура келүүчүлүк берилсе, анда бул туура келүүчүлүктүн графиги төмөнкү түгөйлөрдөн турат б.а. Г={(3,2), (5,2),(5,4), (7,2), (7,4), (7,6)}.

7R2 деген жазууну «X көптүгүнөн алынган 7 санына Y көптүгүнөн 2 деген сан туура келет» же «X көптүгүндөгү 7саны Y көптүгүндөгү 2 санынан чоң» деп окушат.

Берилген туура келүүчүлүктү ачык элестетип көрсөтүү үчүн Эйлер-Венндин диаграммасын жана стрелкаларды пайдаланышат. Мисалы, жогорку туура келүүчүлүктү чийме түрүндө көрсөтөбүз:



Пайда болгон чийме туура келүүчүлүктүн графы деп аталат. Же ориентирленген графы деп да айтышат. (Гректин «граф» деген сөзү кыргызча «жазам» деген мааниде). Стрелканын учундагы чекиттер анын башталышындагы чекиттин образы деп аталат. Мисалы, 2 чекити 3 чекитинин образы болот жана R(3) деп жазылат. R(3)=2.

Ал эми стрелкалардын башталышындагы чекиттер алардын образдарынын толук прообразы деп аталат жана $R^{-1}(2)$ деп белгиленет. $R^{-1}(2)=3$

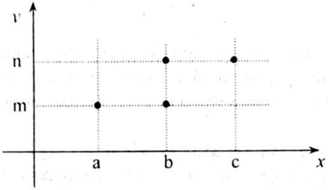
Чиймеде көрсөтүлгөндөй берилген чекиттен бир да стрелка чыкпашы мүмкүн, анда анын образдарынын көптүгү бош көптүк болот. Жогорку мисалда R(1)=∅.

Бош эмес образдарга ээ болгон, X көптүгүнүн элементтеринен турган көптүк (б.а. ал чекиттен жок дегенде бир стрелка чыккан чекиттерден) ал туура келүүчүлүктүн **аныкталуу областы** деп аталат жана көбүнчө А тамгасы менен белгиленет. Ал эми Y көптүгүнүн бош эмес толук пробраздарынан турган В көптүгү (б.а. ал жерде жок дегенде бир стрелка аяктаган чекиттердин) берилген R туура келүүчүлүгүнүн маанилеринин көптүгү деп аталат. Жогорку келтирилген мисалдагы туура келүүчүлүк үчүн A={3,5,7}, B={2,4,6}.

Башталгыч класстардын программасындагы түшүнүктөрдүн көпчүлүгү обьектилердин ортосундагы туура келүүчүлүктөр жана катнаштыктардын коштоосунда үйрөтүлөт жана калыптанат. Мисалы, натуралдык сандар жана алардын касиеттери «чоң», «кичине», «ошончо», «барабар» катнаштыктарысыз толук жеткиликтүү өздөштүрүлбөйт. Ошондой эле арифметикалык амалдардын натыйжалары менен алардын компоненттеринин ортосундагы көз карандылыктар туура келүүчүлүк аркылуу калыптанат. Мисалы: «Кошулуучу бир нече бирдикке чоңойсо (азайса), анда сумма да ошончо бирдикке чоңоет (азаят)».

Жогоруда айтылгандай X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы R туура келүүчүлүгүнүн графиги XxY декарттык көбөйтүндүнүн камтылган көптүгү болгондуктан, ал туура келүүчүлүктүн (x,y) түгөй түрүндөгү элементтерин хоу тик бурчтуу декарттык координата системасында көрсөтүүгө болот.

Мисалы, X={a,в,c}, У={m,n} көптүктөрү берилип, алардын арасындагы кандайдыр бир R туура келүүчүлүгүнүн Г= X{(a,m), (b, m),(c,n), (в,n)} деген графы берилсин. Анда анын графиги болуп төмөнкү чиймедеги 4 чекиттин көптүгү эсептелет.



2. Туура келүүчүлүктөрдүн кээ бир түрлөрү. Туура келүүчүлүктөр менен болгон операциялар.

Эгер X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы R туура келүүчүлүгүнүн графиги алардын декарттык көбөйтүндүсү XxY менен дал келсе, анда R туура келүүчүлүгү толук туура келүүчүлүк деп 4аталат.

Эгер R туура келүүчүлүгүнүн графиги бош көптүк болсо ($\Gamma=\varnothing$), анда R бош туура келүүчүлүк деп аталат. Мисалы, X– коендордун көптүгү, Y– жолборстордун көптүгү болсун. Анда алардын арасындагы «x y жеген тамакты жейт» деген туура келүүчүлүк бош.

XxY декарттык көбөйтүндүнүн камтылган көптүктөрү менен ар түрдүү операцияларды (кесилишүү, биригүү, ж.б.) жүргүзүүгө мүмкүн. Ошол ар бир операцияга туура келүүчүлүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлүүчү операциялар жооп берет. Эгер X жана Y көптүктөрүнүн арасында xPy жана xQy туура келүүчүлүктөрү берилсе, анда алардын кесилиши ($R=P\cap Q$) деп, графиги берилген туура келүүчүлүктөрдүн графиктеринин кесилишине барабар xRy туура келүүчүлүгү аталат б.а. xPy жана xQy болгондо гана xRy болот. Эгер xPy туура келүүчүлүгү P(x,y) предикаты, ал эми xQy– Q(x,y) предикаты менен берилсе, анда xRy туура келүүчүлүгү $R(x,y)=P(x,y)\wedge Q(x,y)$ предикаты менен берилет.

xPy жана xQy туура келүүчүлүктөрүнүн биригүүсү ($S=P\cup Q$) деп, графиги xPy жана xQy туура келүүчүлүктөрүнүн графиктеринин биригүүсү болгон xSy туура келүүчүлүгү аталат.б.а. xPy же xQy болгондо гана xSy болот. Эгер xPy туура келүүчүлүгү P(x,y) предикаты, ал эми xQy– Q(x,y) предикаты менен берилсе, анда xSy туура келүүчүлүгү $S(x,y)=P(x,y)\vee Q(x,y)$ предикаты менен берилет.

Мисалы, $x\neq y$ туура келүүчүлүгү сандар үчүн $x<y$ жана $x>y$ туура келүүчүлүктөрүнүн биригүүсү болот б.а. эгер $x\neq y$ болсо, $x>y$ же $x<y$ болот, жана тескерисинче, эгер $x<y$ же $x>y$ болсо, анда $x\neq y$ болот.

$x<y$ туура келүүчүлүгү $x\leq y$ жана $x\neq y$ туура келүүчүлүктөрүнүн кесилиши болот б.а. эгер $x\leq y$ жана $x\neq y$ болсо, анда $x<y$ болот.

Эгер xPy жана xQy туура келүүчүлүктөрүнүн графиктери XxY көптүгүндө кошумча көптүктөр болушса (б.а. эгер алар кесилишпесе, ал эми алардын биригүүсү бардык XxY болсо), анда мындай туура келүүчүлүктөр карама-каршы туура келүүчүлүктөр деп аталышат. Мисалы, «$x>y$» жана «x саны y тен ашпайт» деген туура келүүчүлүктөр карама-каршы болушат. Эгер xPy туура келүүчүлүгү

P(x,y) предикаты менен берилсе, анда анын карама-каршысы берилген предикаттын тануусу P(x,y) менен берилет.

Эгерде xPy жана xQy шарттары бир эле мезгилде аткарыла турган элементтердин (x,y) түгөйү жок болсо, анда берилген туура келүүчүлүктөр **туура келбеген** (несовместимые) туура келүүчүлүктөр деп аталышат. Мисалы, түз сызыктар үчүн $x \parallel y$ жана $x \perp y$ туура келүүчүлүктөрү туура келбеген туура келүүчүлүктөр болушат, себеби эки түз сызык бир эле убакта параллель жана перпендикуляр боло алышпайт.

Эгер xPy туура келүүчүлүгүнүн графиги xQy туура келүүчүлүгүнүн графигине камтылган болсо, анда xQy ти xPy тин натыйжасы деп айтышат. Мында, ар кандай (x,y) түгөйү үчүн xPy болсо, анда xQy болот. Мисалы, «x жана y үч бурчтуктары окшош» туура келүүчүлүгү «x жана y үч бурчтуктары конруэнттүү» туура келүүчүлүгүнүн натыйжасы болот, себеби ар кандай конруэнттүү үч бурчтуктар окшош болушат.

X жана Y көптүктөрүнүн арасында xRy туура келүүчүлүгү берилсин. Эгер xRy болгондо гана ySx туура келүүчүлүгү бар болсо, анда ySx туура келүүчүлүгү Y жана X көптүктөрүнүн арасында тескери туура келүүчүлүк болот. Көбүнчө ySx деп жазуунун ордуна $yR^{-1}x$ деп жазышат. Мисалы, «x саны y ке бөлүнөт» деген туура келүүчүлүккө «y саны x тин бөлүүчүсү» деген туура келүүчүлүк тескери болот. Себеби, y саны x тин бөлүүчүсү болгондо гана x саны y санына бөлүнөт.

R^{-1} туура келүүчүлүгүнүн графигин сызуу үчүн R туура келүүчүлүгүндөгү ар бир түгөйдүн компоненттерин орун алмаштырып коюу керек. Ал эми анын графигин алуу үчүн R туура келүүчүлүгүнүн графигиндеги стрелкалардын багытын өзгөртүп коюу керек.

3. Көптүктөгү катнаштыктар.

Эки көптүктүн элементтеринин арасындагы байланыштар сыяктуу эле бир эле көптүккө тиешелүү болгон элементтердин ортосунда да ар түрдүү байланыштар бар экендиги жогорку пунктта айтылган эле.

Мисалы, адамдардын көптүгүндө «x жана y бир тууган», «x менен y дос», «x тин тагасы y», «x менен y бир группада окуйт», ж.б.сыяктуу байланыштар (катнаштыктар) бар.

Же, натуралдык сандардын көптүгүндө «x саны y санына эселүү», «x>y», «x ти y ке бөлсө 5 деген калдык калат», «x+y=15» ж.б. сыяктуу байланыштар көп.

Аныктоо: X көптүгүндөгү катнаштык деп ошол көптүктүн элементтеринин арасындагы туура келүүчүлүк аталат.

Белгилениши туура келүчүлүк сыяктуу эле R,Q,S,T,... тамгалары менен белгиленип, xRy, xQy, xSy,... деп жазылат. ...XRy жазуусу «x жана y элементтери өз ара R катнаштыгына ээ» деп окулат.

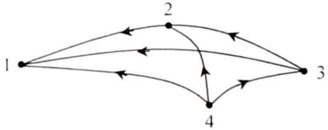
«Катнаштык» терминин «катыш» (сандардын катышы) термини менен чаташтырууга болбойт.

X көптүгүндө берилген R катнаштыгы– бул X жана Γ көптүктөрүнүн түгөйү, мында Γ⊂XxX– R катнаштыгынын X көптүгүндөгү графиги; X– катнаштыктын берилген областы болот.

Катнаштык туура келүүчүлүктүн айрым бир учуру болгондуктан, мурда туура келүүчүлүк жана анын графиги жөнүндөгү бардык айтылыштар туура болот.

Мисал–1. X={1,2,3,4} көптүгүндө «x>y» катнаштыгы бар, мында x∈X, y∈X. Бул катнаштыктын графиги Γ={(2,1), (3,1), (4,1), (3,2), (4,3), (4,2)} болот.

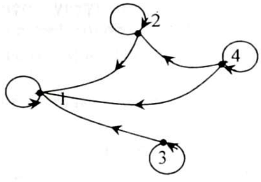
Берилген катнаштыкты граф түрүндө төмөнкүчө сүрөттөөгө болот:

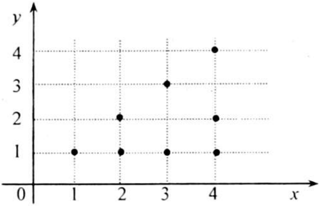


Мисал-2. X={1,2,3,4} көптүгүндө S: «x саны y санына бөлүнөт» деген катнаштык бар, мында x∈X, y∈X. Анын графиги Γ={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,4)}. Бул катнаштыктын графын жана тик бурчтуу координата системасындагы сүрөттөлүшү төмөнкүчө:

Математикада бинардык катнаштыктардан башка да катнаштыктар кездешет. Алар үч орундуу, төрт орундуу, ж.б. предикаттар аркылуу берилет. Мисалы, N көптүгүндө берилген «Z=x+y» предикаты натуралдык сандардын көптүгүндөгү үч орундуу (тернардык) катнаштыкты мүнөздөйт. Ар кандай X көптүгүндө

теңдештик жана **айырмалоо** катнаштыктарын кароого болот. (отношения тождества и различия).





Теңдештик катнаштыгы $(x;x)$, $x \in X$ түрүндөгү түгөйлөрдүн Г көптүгү менен берилет жана $x \equiv y$ деп жазылат.б.а. x менен y дал келгенде гана $x \equiv y$ болот. Кээде $x \equiv y$ катнаштыгын $x = y$ деп жазышат да, **барабардык** катнаштыгы деп аташат.

Теңдештик катнаштыгына карама-каршы болгон катнаштык айырмалоо катнаштыгы деп аталат жана $x \not\equiv y$ же $x \neq y$ деп жазылат.

4. Көптүктү өз ара кесилишпеген көптүкчөлөргө бөлүү. Классификация.

X– кандайдыр бир окуу жайынын студенттеринин көптүгү болсун. Бул көптүктүн элементтеринин ортосунда «жердеш болуу», «курсташ болуу», «тааныш болуу», «отличник болуп окуу», «бирдей жашта болуу», ж.б. сыяктуу ар түрдүү катнаштыктар бар. Булардын ичинен «курсташ болуу» деген катнаштык алып, ошол окуу жайынын студенттерин топторго бөлсөк, анда X1,X2,X3,X4,X5 деген ар бир курстун студентеринин көптүкчөлөрү келип чыгат. Мында ар бир көптүк экинчи көптүк менен жалпы элементке ээ эмес (бир эле студент эки курста окубайт!), б.а. пайда болгон көптүкчөлөр өз ара бири-бири менен кесилишпейт. Ошондой эле $X=X1 \cup X2 \cup X3 \cup X4 \cup X5$ экендиги анык.

Берилген көптүктү башка катнаштыктын жардамы менен да өз ара кесилишпеген көптүкчөлөргө (класстарга) ажыратууга (бөлүүгө) мүмкүн.

Жалпысынан алганда, тигил же бул көптүктү өз ара кесилишпеген көптүкчөлөргө төмөнкү шарттардын бир эле мезгилде аткарылган учурунда гана ажыратууга мүмкүн:

1. Бөлүнгөн көптүкчөлөрдүн бардыгы бош эмес.
2. Ар кандай эки көптүкчө өз ара кесилишпейт.

3. Ажыратылган (бөлүнгөн) көптүкчөлөрдүн биригүүсү берилген көптүккө барабар.

Ошондой эле натуралдык сандардын көптүгүн бөлүүчүлөрүнүн санына жараша 3 көптүкчөгө (класска) ажыратууга болот: жөнөкөй сандардын көптүгү, курама сандардын көптүгү жана бир санынан турган көптүк.

Бардык көп бурчтуктардын көптүгүн: үч бурчтуктардын, төрт бурчтуктардын, ж.б. топторуна ажыратууга болот.

Көптүктөрдү мындай кесилишпеген көптүкчөлөргө ажыратуу турмушта ар түрдүү классификациялоонун негизин түзөт: «Класс» түшүнүгү жана анын синонимдери «тип», «түр», «сорт», ж.б. адам баласынын турмушунда көп колдонулат. Мисалы: китепканадагы китептерди алфавит боюнча бөлүү же предметтерге карап ажыратуу; жаныбарларды алардын түрлөрү боюнча бөлүү; студенттерди жынысына карата ажыратуу, ж.б.

Бирок, берилген көптүктү бардык эле катнаштыктар, жогоркудай көптүкчөлөргө ажырата албайт. Мисалы, окуу жайындагы студенттердин көптүгүн «x деген студент y деген студент менен тааныш» катнаштыгы аркылуу ажыратууга мүмкүн эмес. Себеби, x менен y, ал эми y менен z тааныш болсо, анда x менен z тааныш болбой калышы мүмкүн. Же ошол эле көптүктү отличниктердин жана спортсмендин жогорку талаптарга жооп берген топторуна ажыратууга болбойт.

5. Катнаштыктардын негизги касиеттери.

X көптүгүндө кандайдыр бир R катнаштыгы берилсин.

1^0 Эгер X көптүгүнөн алынган ар кандай x үчүн xRx айтылышы чын болсо, б.а. ар кандай $x \in X$ элементи өзү менен өзү R катнаштыгында болсо, анда R **рефлексивдүү** катнаштык деп аталат.

Мисалы, "барабар", "параллель", "жердеш" ж.б. катнаштыктары рефлексивдүү.

2^0 Эгер X каптүгүнүн ар кандай элементи x өзү менен R катнаштыгында болбосо, анда ал антирефлексивдүү катнаштык деп аталат. Мисалы, "чоң", "кичине", "перпендикуляр" ж.б. антирефлексивдүү.

Практикада рефлексивдүү да, антирефлексивдүү да болбогон катнаштыктар кездешет. Мисалы, тегиздиктеги чекиттердин көптүгүндө берилген “х жана у чекиттери *l* түз сызыгына карата симметриялуу” катнаштыгы жогоркуга мисал болот.

3^0. Х көптүгүнөн алынган ар кандай х жана у үчүн хRу айтылышынан уRх айтылышы келип чыкса, анда R катнаштыгы **симметриялуу** катнаштык деп аталат. Мисалы, “барабар”, “параллель”, “дос”, “конруэнттүү”, ж.б. катнаштыктары симметриялуу.

4^0. Х көптүгүнөн алынган ар кандай х жана у элементтери үчүн бир эле мезгилде хRу жана уRх катнаштыгы орун албаса, анда R катнаштыгы **ассимметриялуу** катнаштык деп аталат.

Мисалы, “чоң”, “кичине”, “узун”, “улуу”, ж.б. катнаштыктары ассимметриялуу болушат.

5^0. х=у болгондо гана хRу жана уRх айтылыштары бир мезгилде чын болушса, анда R катнаштыгы **антисимметриялуу** катнаштык деп аталат. Ал асимметриялуу катнаштык менен теңдеш катнаштыгынын бирикмеси болот.

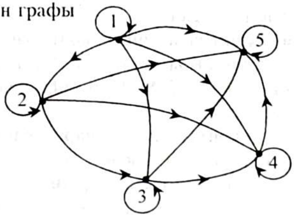
Мисалы: N натуралдык сандарынын көптүгүндө “х≥у” жана “х≤у” катнаштыктары, “х саны у ке бөлүнөт” жана “у саны х ке бөлүнөт” катнаштыктары антисимметриялуу. Себеби, х=у болгондо гана берилген айтылыштардын экөө тең чын болот.

6^0. Х көптүгүнөн алынган ар кандай х, у жана z элементтери үчүн хRу жана уRz болгондо хRz болсо, анда R катнаштыгы **транзитивдүү** катнаштык деп аталат.

“”Мисалы, “барабар”, “чоң”, “кыска”, “бөлүнөт”, “курсташ” сыяктуу катнаштыктар транзитивдүү болушат.

Жогорку касиеттерге ээ болгон катнаштыктардын графтарын багытталган стрелкалар аркылуу сүрөттөөгө болот. Мисалы: Х={1,2,3,4,5} көптүгүндөгү «х≤у» катнаштыгы берилсе, анда ал катнаштыктын транзитивдүү, рефлексивдүү жана антисимметриялуу экендигине оңой эле ишенүүгө болот.

Алардын графы



6. Эквиваленттүүлүктүн катнаштыгы.

Аныктоо: Эгер R катнаштыгы X көптүгүндө рефлексивдүү, симметриялуу жана транзитивдүү болсо, анда ал **эквиваленттүүлүктүн** катнаштыгы деп аталат.

Мисалы, «барабар», «параллель», «жердеш», ж.б. катнаштыктары эквиваленттүүлүктүн катнаштыктары болушат.

Мындай катнаштыктар көптүктү өз ара кесилишпеген көптүктөрдүн класстарына ажыратуу менен байланышта экендигин өткөн параграфтарда көргөн элек. Бул кокусунан эмес. Аталган факты боюнча төмөнкү теорема орун алат:

> R катнаштыгы X көптүгүн өз ара кесилишпеген көптүктөрдүн классына ажыратышы үчүн анын эквиваленттүү катнаштык болушу зарыл жана жетиштүү.

Эквиваленттүүлүктүн катнаштыгы ажыраткан X көптүгүнүн класстары **эквиваленттүүлүктүн класстары** деп аталышат, ал эми бир класска тиешелүү болгон x жана y элементтер **эквиваленттүү** деп аталышат да $x \sim y$ деп жазылат.

Эквиваленттүүлүк катнаштыктарына бир топ мисалдарды карап көрөлү.

1) Туюнтмалардын (сандык) көптүгүндө «x жана y сан туюнтмалары бирдей сан мааниге ээ» деген катнаштык эквиваленттүүлүктүн катнаштыгы болот. Себеби:
   а) рефлексивдүү: x туюнтмасынын мааниси x туюнтмасынын мааниси менен бирдей;
   б) симметриялуу: эгер x туюнтмасынын мааниси y туюнтмасынын мааниси менен бирдей болсо, анда y тин мааниси x тин маанисине дал келет;
   в) транзитивдүү: эгер x тин мааниси y тин мааниси менне, ал эми y тин мааниси z тин мааниси менен дал келсе, анда x тин мааниси z тин мааниси менен дал келет.

Катнаштык сан туюнтмаларынын көптүгүн маанилери дал келген туюнтмалардын класстарына ажыратат. Мисалы, 5+3, 2^3, 10−2 туюнтмалары бир класста, ал эми 7−3, 2^2, 6:2+1 туюнтмалары экинчи класска тиешелүү.

2) Түз сызыктардын көптүгүндө «параллель» катнаштыгы эквиваленттүүлүктүн катнаштыгы болот. Б.а.:
   а) рефлексивдүү: ар кандай x түз сызыгы үчүн $x \parallel x$;
   б) симметриялуу: эгер $x \parallel y$ болсо, ана $y \parallel x$;
   в) транзитивдүү: эгер $x \parallel y$ жана $y \parallel z$ болсо, анда $x \parallel z$ болот.

Бул катнаштык тегиздиктеги түз сызыктардын көптүгүн өз ара параллель болгон түз сызыктардын класстарына бөлөт.

3) Геометриялык фигуралардын көптүгүндө «х фигурасы у фигурасына конгрэнттүү» жана «х фигурасы у фигурасына окшош» деген катнаштыктар да эквиваленттүүлүктүн катнаштыктары болушат.

«х фигурасы у фигурасына конгурэнттүү» деген катнаштык геометриялык фигураларды өз ара конрэнттүү болгон фигуралардын класстарына бөлөт. Ошондуктан практикада бардык фигуралар окуп үйрөнүлбөстөн, ар бир класстан бирден гана фигура каралат (калгандары аны менен дал келет).

Бул параграфта каралган эквиваленттүүлүктүн катнаштыкгы башталгыч класстардын программасында да жолугат. Анда чектүү сандагы элементтери бар көптүктөр гана каралат.

7. Иреттүүлүк катнаштыгы.

Практикада тигил же бул көптүктүн элементтери иретке (тартипке) келтирүүчү катнаштыктарды учуратууга болот. Мисалы:

а) окуучулардын көптүгүндө «х деген окуучу у деген окуучудан кыска»;

б) адамдардын көптүгүндө «х аттуу адам у аттуу адамдан жаш»;

в) кесиндилердин көптүгүндө «х кесиндиси у кесиндисинен узун», ж.б.

Мындай катнаштыктарды **иреттүүлүк катнаштыктары** деп коюшат.

Аныктоо: Х көптүгүндө транзитивдүү жана антисимметриялуу болгон катнаштык иреттүүлүк катнаштыгы деп аталат.

Мисалы, R: «х саны у тин бөлүүчүсү» деген катнаштык Х={1,2,3,4,5} көптүгүндө иреттүүлүк катнаштыгы болот. Себеби ал:

а) транзитивдүү: х саны у санынын бөлүүчүсү, ал эми у саны z санынын бөлүүчүсү болсо, анда х саны z санынын бөлүүчүсү болот. Б.а. 1 саны 2 нин бөлүүчүсү, ал эми 2 саны 4 түн бөлүүчүсү болсо, анда 1 саны 4 түн да бөлүүчүсү болот;

б) антисимметриялуу: х саны у санынын бөлүүчүсү, ал эми у саны х санынын бөлүүчүсү деген сүйлөмдөрдөн х=у экендиги келип чыгат.

Ошол эле Х={1,2,3,4,5} көптүгүндө S: «х≤у» катнаштыгы да иреттүүлүк катнаштыгы болот. Бирок, R жана S катнаштыктарынын ортосунда айырма (өзгөчөлүк) бар. Б.а. S катнаштыгы аркылуу Х көптүгүнүн ар кандай эки элементин «салыштырууга» болот. Ал эми

R катнаштыгы X көптүгүнүн айрым элементтери үчүн гана аныкталат (Мисалы, 2 саны 5 санынын бөлүчүүсү деп айтууга болбойт). Ошондуктан R катнаштыгын **айрым иреттүүлүктүн,** ал эми S катнаштыгын **сызыктуу иреттүүлүктүн** катнаштыгы деп коюшат.

Аныктоо: Эгер X көптүгүнөн алынган ар кандай x жана y элементтери үчүн же xRy же yRx болсо, анда иреттүүлүктүн катнаштыгы R X көптүгүндө сызыктуу иреттүүлүктүн катнаштыгы деп аталат. Эгер ал аталган касиетке ээ болбосо– айрым иреттүүлүктүн катнаштыгы болот.

Ошондой эле иреттүүлүк катнаштыктарынын төмөнкүдөй эки түрү кездешет:

1) **катуу иреттүү катнаштык:** X көптүгүнөн алынган бардык x тер үчүн xRx аткарылбаса,
2) **катуу эмес иреттүү катнаштык:** X көптүгүнөн алынган ар кандай x үчүн xRx аткарылса, б.а. ал рефлексивдүү болсо.

Демек, «x саны y тин бөлүүчүсү» деген иреттүүлүк катнаштыгы X={1,2,3,4,5} көптүгүндө катуу эмес иреттүүлүк катнаштыгы болот. Себеби, ар кандай $x \in X$ үчүн бул катнаштык рефлексивдүү б.а. X көптүгүндөгү ар кандай элемент өзүнө өзү бөлүнөт. Катуу иреттүүлүк катнаштыкка мисал болуп X={1,2,3,4,5} көптүгүндөгү T: «x<y» катнаштыгы эсептелет. Анткени:

1) Ал транзитивдүү: эгер x<y жана y<z болсо, анда x<z болот (2<3, 3<5 болсо, 2<5 болот).
2) Ар кандай $x \in X$ үчүн x<x туура эмес.
3) X тен алынган ар кандай x жана y үчүн бир мезгилде x<y жана y<x барабарсыздыктары аткарылбайт.

Демек, X көптүгүндө берилген R катнаштыгынын иреттүүлүк катнаштык экендигине ишенүү үчүн анын транзитивдүү жана антисимметриялуу болушун тактоо жетиштүү болот. Эгер ошол эле катнаштык рефлексивдүү да болсо, анда ал катуу эмес иреттүүлүк катнаштыгы болсо, анда ал катуу иреттүүлүк катнаштыгы болбойт.

Эгер X көптүгүнөн алынган ар кандай эки башка x жана y элементтери үчүн xRy же yRx катнаштыктарынын бири орун алса, анда R–сызыктуу иреттүүлүк катнаштыгы. Эгер R бул касиетке ээ болбосо– айрым иреттүүлүк катнаштыгы болот.

Акыркы айтылгандарды мисалдар аркылуу карап көрөлү:

Айталы X– класстагы окуучулардын көптүгү, R: «x деген окуучу y деген окуучудан бийик» катнаштыгы берилсин.

R катнаштыгынын түрүн аныктоо үчүн, анын кайсы касиеттерге ээ болушун тактайбыз:

1) Транзитивдүү: x окуучу y окуучудан бийик жана y окуучу z окуучудан бийик болсо, анда x окуучу z окуучудан да бийик.
2) Ар кандай $x \in X$ үчүн xRx туура эмес (бир дагы окуучу өзүнөн өзү бийик эмес).
3) Бир эле убакта «x y тен бийик» жана «y x тен бийик» сүйлөмдөрү туура боло турган x жана y деген окуучулар жок.

Демек, берилген катнаштык– катуу иреттүүлүк катнаштыгы. Эгерде класстагы окуучулардын бою бирдейлери жок болсо, анда каалаган эки окуучу жөнүндө «x y тен бийик» же «y x тен бийик» деп айтууга болот. Бул учурда R катнаштыгы катуу жана сызыктуу иреттүүлүк катнаштыгы болот.

Эгер класста бойлору бирдей болгон жок дегенде эки окуучу бар болсо, анда R– катуу жана айрым иреттүүлүк катнаштыгы болот.

Башталгыч класстарда биринчи класстан баштап эле окуучулар иреттүүлүк катнаштыктары менен кездешет. Мисалы, натуралдык сандардын көптүгүндө «чоң», «кичине»; кесиндилердин көптүгүндө «узун», «кыска»; ар түрдүү об'ектилердин көптүктөрүндө «арзан», «кымбат», «улуу», «кичүү», «бийик», «жапыс» сыяктуу катнаштыктар менен ар түрдүү операциялар аткарылат.

8. Иреттелген көптүктөр.

Аныктоо: Иреттүүлүк катнаштыгы R аныкталган X көптүгү **иреттелген** көптүк деп аталат, Эгер R катнаштыгы айрым иреттүүлүк катнаштыгы (катуу же катуу эмес) болсо, анда X көптүгү **айрым иреттелген** көптүк деп аталат. Эгер R катнаштыгы сызыктуу иреттүүлүк катнаштык болсо, анда x көптүгү **сызыктуу иреттелген** көптүк деп аталат.

Мисалы, $X=\{1,2,3,4,5\}$ көптүгү «x саны y тин бөлүүчүсү» деген катнаштык аркылуу айрым иреттелет, ал эми «$x<y$» же «$x\leq y$» катнаштыктары менен сызыктуу иреттелет.

Ошондой эле натуралдык сандардын көптүгү «кичине» деген катнаштык менен сызыктуу, ал эми «бөлүнөт» катнаштыгы аркылуу сызыктуу эмес иреттелет.

Иреттелген көптүктөр бир топ касиеттерге ээ:

Айталы, R катнаштыгы менен иреттелген X көптүгүнүн a,b,c элементтери болсун. Эгерде aRb жана bRc болсо, анда b элементи a менен c нын ортосунда жайгашкан болот. Мисалы, «$x<y$» катнаштыгы

менен иреттелген натуралдык сандардын көптүгүндө $1<3$ жана $3<5$ болсо, анда 3 саны 1 менен 5 тин арасында жайгашат.

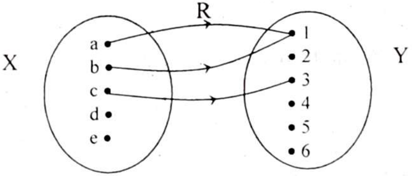
R катнаштыгы менен сызыктуу иреттелген X көптүгүнүн ар кандай эки элементинин арасында чектүү сандагы элементтер жайгашса, анда ал көптүк **дискреттүү** көптүк деп аталат.

Сызыктуу иреттелген көптүк **тыгыз көптүк** деп аталат, эгерде анын ар кандай эки элементинин арасында ошол көптүккө тиешелүү болгон элемент бар болсо.

Мисалы, «$x<y$» катнаштыгы менен иреттелген рационалдык сандардын Q көптүгү тыгыз көптүк болот. Себеби, ар кандай x жана y ($x \neq y$) рационалдык сандарынын ортосунда $z=\dfrac{x+y}{2}$ деген рационалдык сан бар.

9. Функция түшүнүгү.

X={a,b,c,d,e} жана Y={1,2,3,4,5,6} көптүктөрүнүн ортосунда төмөнкү чиймеде сүрөттөлгөн кандайдыр бир R туура келүүчүлүгү берилсин:



Мында X көптүгүнүн бардык эле элементине Y көптүгүнүн элементи туура келбегени көрүнүп турат. Эгер Y тин туура келүүчү элементи бар болсо, анда ал бирөө гана б.а. aR1, bR1, cR3.

R туура келүүчүлүгүнүн узатуучу көптүгү болгон X көптүгүнүн элементтеринен, Y көптүгүндөгүлөргө туура келүүчүлөрү бар болгондорунан көптүкчө түзөбүз. Ал A={a,b,c} көптүгү болот.

Бул учурда, A көптүгүнүн ($A \subset X$) ар бир элементине Y көптүгүнүн бир гана элементи туура келет деп айтышат. X жан Y көптүктөрүнүн ортосундагы мындай туура келүүчүлүктү **функционалдык туура келүүчүлүк** же **функция** деп айтышат. Б.а. эгерде A көптүгүнүн ($A \subset X$) ар бир x элементине Y көптүгүнүн бир гана y элементин тура келтирүүчү X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы туура келүүчүлүк **функция** деп аталат. A көптүгү функциянын **аныкталуу областы** болот.

Функциянын аныктоосуна ылайык функциянын графиги, биринчи компоненталары бирдей болгон түгөйлөрдү кармап турбайт. Мисалы, жогорку мисалдагы фукнциянын графиги Q={(a,1),(b,1),(c,3)} болот.

Математикада функционалдык туура келүүчүлүк f, g, h, p, φ ж.б. латын тамгалары менен белгиленет.

Аныкталуу областы $A \subset X$ жана кабыл алуучу көптүгү Y болгон f функциясы берилсин. Анда $x \in X$ ке туура келүүчү Y көптүгүнүн y элементи f фунциясынын **мааниси** деп аталат жана **y=f(x)** деп жазылат. Окулушу «y барабар x тен f» (көпчүлүк учурда ыңгайлуу болсун үчүн «y барабар f от x» деп окушат).

Y тен алынган f функциясынын маанилеринин көптүгү **функциянын маанилеринин көптүгү** деп аталат.

Жогорку функция үчүн {1,3} көптүгү болот.

«y=f(x) функциясынын x=c болгондогу мааниси 3 кө барабар» деген сүйлөм f(c)=3 деп жазылат.

Функция түшүнүгүнө бир топ конкреттүү мисалдарды карап көрөлү:

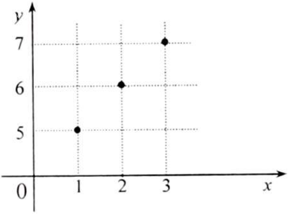
1. Айталы X– класстагы окуучулардын көптүгү, Y– окуучулардын алуучу баалардын көптүгү берилсе, анда алардын ортосунда «x деген окуучу текшерүү ишинен y деген баа алды» деген туура келүүчүлүк бар болот. A– текшерүү ишке катышкан окуучулардын көптүгү болот. Анда A көптүгүнүн ар бир элементи x ке Y көптүгүнөн алынган бир гана y деген элемент туура келери ачык.

   Демек, окуучулардын көптүгү X менен баалардын көптүгү Y тин ортосундагы аталган туура келүүчүлүк функция болот. Анын аныкталуу областы– текшерүү иш жазган окуучулардын көптүгү A болот.
2. Графиги Q={(a,3), (b,5), (c,3)} болгон X={a,b,c} жана Y={3,5,7,9} көптүктөрүнүн арасында туура келүүчүлүк берилсин.

   Бул туура келүүчүлүктүн функция экендиги графиктен эле көрүнүп турат. Б.а. түгөйлөрдүн биринчи компоненталары ар башка. Мындай экендигине туура келүүчүлүктүк графын сызуу аркылуу да ишенүүгө болот. Бул функциянын аныкталуу областы {a,b,c} көптүгү болуп, ал X менен дал келери көрүнүп турат. Ал эми функциянын маанилеринин көптүгү: {3,5}

1. X={1,2,3} жана натуралдык сандардын көптүгү Y=N көптүктөрүнүн ортосундагы «х тен у 4 кө чоң» деген туура келүүчүлүктү карап көрөлү.

Мында, X тен алынган ар бир санга, андан 4 бирдикке чоң Y тен бир гана сан табууга болору анык. Б.а. 1 ге 5 саны, 2 ге 6 саны, 3 кө 7 саны туура келет. Демек, берилген туура келүүчүлүк аныкталуу областы A=X болгон f функциясы болот. Бул функцияны f: x→y=x+4 түрүндө берүүгө болот. Анын графиги Q={(1,5), (2,6), (3,7)} көптүгү. Бул функциянын графиги xoy тегиздигинде 3 чекиттен турган төмөнкүдөй чийме болот.



Башталгыч класстарда функция түшүнүгүн өздөштүрүү жана калыптандыруу, ачык айтылбаганы менен төмөнкү сыяктуу ар түрдүү таблицаларды толтуруу жана аларды анализдөөлөр аркылуу жүргүзүлөт:

a	10	10	10	10	10	10
b	1	2	3	4	5	6
a+b						

a	20	30	40	50	60	70
b						
a-b	5	5	5	5	5	5

Бөлүнүүчү	60	50	40	20	10	8	6
Бөлүүчү	2	2	2	2	2	2	2
Тийинди							

10. Чагылыштар.

Кандайдыр бир f функционалдык көз карандылык берилсин. X– узатуу областы, Y– кабыл алуу областы, ал эми A– аныкталуу областы болсун.

Эгер A=X болсо, б.а. f функциясынын аныкталуу областы анын узатуу областы менен дал келсе, анда X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон f чагылышы берилди деп айтышат. Б.а.

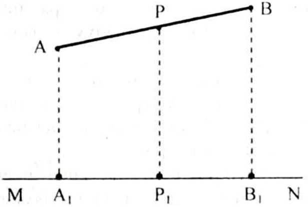
X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон f чагылышы деп x тен алынган ар бир x элементине Y тен бир гана y деген элемент туура келтире турган X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы туура келүүчүлүк аталат.

Мында, X– **чагылыштын узатуу көптүгү,**
Y– **чагылыштын кабыл алуу көптүгү**
болушат. Эгер f X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон чагылышы болсо, анда аны f: X→Y деп жазышат.

Айталы, f X тин Y ке болгон чагылышы болсун. f чагылышындагы $x \in X$ элементи x элементинин **изи (образы)** деп аталып, f(x) деп белгиленет. Б.а. y=f(x) болот. Бардык $x \in X$ элементтеринин көптүгү f: X→Y чагылышынын **маанилеринин көптүгү** деп аталат.

Мисалы: X–AB кесиндисиндеги, ал эми Y–MN түз сызыгындагы чекиттердин көптүгү болсун. AB кесиндисинин ар бир чекитинен MN түз сызыгына перпендикуляр жүргүзүү менен AB нын ар бир P чекитине MN дин P1 чекитин туура келтиребиз.

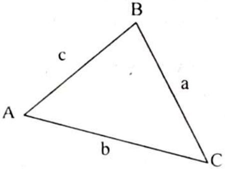
AB кесиндисинин ар бир чекитине MN түз сызыгынын бир гана чекити туура келгендиктен, бул туура келүүчүлүк AB кесиндисинин чекиттеринин көптүгүн MN түз сызыгынын чекиттеринин көптүгүнө болгон чагылышы болот. A1B1 кесиндисинин чекиттеринин көптүгү бул чагылыштын маанилеринин көптүгү болот. P1 чекити P чекитинин изи. Эгер f: X→Y чагылуусунун маанилеринин көптүгү анын кабыл алуу көптүгү менен дал келсе, анда f X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон толук чагылтуусу деп аталат.

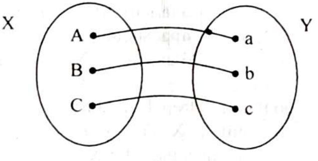


Мисалы, айлананын ар бир чекитин, андан перпендикуляр жүргүзүү менен анын диаметрине чагылдырсак, анда мындай чагылуу айлананын чекиттеринин көптүгүн анын диаметриндеги чекиттердин көптүгүнө чагылдырат.

11. Өз ара бир маанилүү чагылыш.

Берилген X– ABC үч бурчтугунун чокуларынын көптүгү жана Y– анын жактарынын көптүгү. Анын ар бир чокусуна ага карама-каршы жаткан жагын туура келтирели. Мында, X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон чагылуусу экендигине оңой эле ишенүүгө болот.

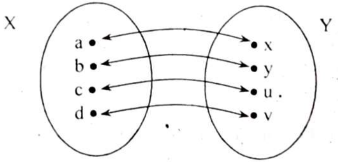




Бул чагылуунун башкалардан болгон өзгөчөлүгү: X тин эки башка элементерине Y тин да ар түрдүү элементтери туура келет. Мындай X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон чагылуусун **өз ара бир маанилүү чагылтуу** деп аташат. Б.а. X көптүгүнөн алынган ар түрдүү x1 жа x2 элементтерине Y көптүгүнүн ар башка y1 жана y2 элементтери туура келсе. Б.а. x1≠x2 болсо, анда f(x1)≠f(x2) болсо, анда X көптүгүнүн Y көптүгүнө болгон чагылуусу өз ара бир маанилүү чагылуу болот. Мындай чагылууну кээде **өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк** да деп коюшат. Же **биективдүү** чагылуу деген ат менен кээ бир адабияттарда кездешет.

Мисалы, класстагы окуучулардын көптүгү жана отургучтардын көптүгүнүн арасындагы туура келүүчүлүк өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк же **биекция** болот. Мында ашыкча отургуч болбосо жана бир отургучта эки окуучу отурбаса.

Ошондой эле сан огундагы чекиттердин көптүгү менен анык сандардын көптүгүнүн ортосундагы чагылуу да биекция болот. Мындай туура келүүчүлүктүн графы эки багыттуу стрелкалар менен төмөнкүдөй көрсөтүлөт:



Жогоркулардан: Эгер эки көптүктүн элементтеринин арасында өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк бар болсо, анда алардын элементтеринин саны бирдей болот.

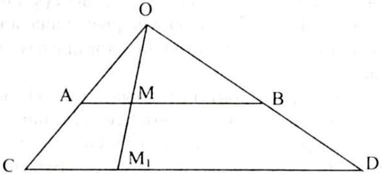
12. Эквиваленттүү көптүктөр.

Арасында өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк бар болгон ар кандай эки көптүк **эквивалентүү көптүктөр** деп аталат, жана X~Y деп жазылат. Мисалы, волейбол ойноп жатышкан эки команданын оюнчуларынын көптүктөрү эквивалентүү болушат.

Эквиваленттүү көптүктөрдүн төмөнкү касиеттерге ээ болоруна оңой эле ишенүүгө болот:

1. Рефлексивдүү: ар кандай X көптүгү үчүн X~X.
2. Симметриялуу: эгер X~Y жана Y~X болот.
3. Транзитивдүү: эгер X~Y жана Y~Z болсо, анда X~Z болот.

Эквиваленттүүлүк түшүнүгү чектүү гана көптүктөрдү эмес, чексиз көптүктөрдү да салыштырууга мүмкүнчүлүк берет. Мисалы, X−AB кесиндисиндеги, ал эми Y−CD кесиндисиндеги чекиттердин көптүктөрү болсун. Алар экөө тең чексиз көптүктөр.



AC жана BD сызыктарын жүргүзүп O чекитин табабыз. Эгер AB кесиндисинен каалаган M чекитин алып, OM сызыгын жүргүзүү менен ага туура келүүчү M1 чекитин табууга болот. Демек, бул түзүүдө AB нын каалаган чекитине CD кесиндисинен бир гана чекит туура келиши жана тескерисинче, CD нын эки түрдүү чекиттерине AB нын да эки башка чекиттери туура келээри анык. Демек, бул чексиз көптүктөр эквиваленттүү көптүктөр болушат.

Эгер эки көптүк эквиваленттүү болсо, анда аларды **тең кубаттуу көптүктөр** же **бирдей кубаттуулукка ээ болгон көптүктөр** деп коюшат. Демек, чектүү көптүктөр үчүн кубаттуулук− бул ошол көптүктүн элементтеринин саны.

13. Натуралдык сан− чектүү тең кубаттуу көптүктөрдүн классы катарында.

Натуралдык сан түшүнүгү адамзатынын турмушунда эң зарыл түшүнүктөрдөн болуу менен илимде да негизги түшүнүктөрдөн болуп эсептелет. Алардын пайда болушу, аталыштары жана жазылыштары бир нече жүздөгөн жылдарга созулган татаал эволюциялык процесс. Ошондуктан ал түшүнүк бир топ тактоолорду талап кылат.

Байыркы заманда сан жөнүндө түшүнүк болбогондуктан күндөлүк турмушунда зарыл болгон обьектилердин саны жөнүндө маалымат алуу үчүн көптүктөрдү салыштыруу операцияларын аткарышкан. Б.а. белгисиз көптүктүк элементтери менен белгилүү болгон көптүктүн элементтеринин арасында өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк жүргүзүшкөн. Мисалы, үй-бүлөдөгү балдардын санын билүү үчүн аларды колдун манжалары менен салыштырышкан. Эгерде "беш" бала болсо, анда балдардын саны "бир колдун манжаларынча", "он балалуу" болсо "эки колдун манжаларынча" деп айтышкан. Илгери "5" же "10" сандары жөнүндө түшүнүк аларда болгон эмес.

Көп жылдык турмуштук тажрыйбалардын натыйжасында гана 5 манжадан, 5 койдон, 5 үйдөн турган ар түрдүү чектүү көптүктөр жалпы окшоштукка, жалпы касиетке ээ болушарын жана ал касиет "беш" деген натуралдык сан менен мүнөздөлө тургандыгы жөнүндө жыйынтык чыгарышкан.

Кандайдыр бир чектүү X көптүгүн алып, ага тең кубаттуу көптүктөрдү топтоо менен тең кубаттуу көптүктөрдүн бир классын түзөлү. Экинчи бир Y көптүгү менен да жогоркудай эле жол менен тең кубаттуу көптүктөрдүн экинчи классын түзөбүз. Бул процессти улантуу менен бардык чектүү көптүктөрдү өз ара тең кубаттуу болгон көптүктөрдүн класстарына бөлүнөрү анык.

Мисалы:

1) Эгерде X={a,b,c,d,e} көптүгүн алсак, анда аны менен бир класска
   - адамдын бир колундагы манжаларынын көптүгү;
   - "Акмат" деген сөздөгү тамгалардын көптүгү;
   - Жылдыздын учтарынын көптүгү, ж.б.

   бар болот.
2) Эгерде Y={m,n} көптүгү берилсе, анда аны менен бир класстагы көптүктөр болуп
   - кесиндинин учтарынын көптүгү;
   - адамдын көздөрүнүн көптүгү;
   - $(x-3)(2x-8)=0$ теңдемесинин тамырларынын көптүгү, ж.б.

   эсептелет.

Бир класстагы көптүктөр ар түрдүү болгону менен алардын бардыгына тиешелүү болгон жалпы касиет– «алардын элементтеринин саны бирдей» бар экендиги көрүнүп турат. Демек, Тең кубаттуу чектүү көптүктөрдүн классы мүнөздөөчү жалпы касиет– бул натуралдык сан болот.

Акыркы мисалдардагы көптүктөрдүн биринчи классы «5» деген натуралдык сан, экинчиси «2» деген натуралдык сан аркылуу мүнөздөлүшөт. Ошондой эле тең кубаттуу көптүктөрдүн ар бир классына бир гана натуралдык сан жана ар бир натуралдык санга бир гана тең кубаттуу чектүү көптүктөрдүн классы туура келери ачык. Эгер тең кубаттуу чектүү көптүктөрдүн кандайдыр бир классы берилсе жана ага туура келүүчү натуралдык сан а болсо, анда ошол класска тиешелүү болгон А көптүгүнө ошол эле а натуралдык саны туура келет. Демек, ар түрдүү кубаттуулуктагы көптүктөр төмөнкү **натуралдык сандардын катары** менен мүнөздөлөт:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

«Натуралдык сан» деген биринчи жолу Рим окумуштуусу **Боэций** (475-524 ж.ж.) тарабынан илимге киргизилген.

Натуралдык сандардын мындай теориясы XIX кылымда Г.Кантор тарабынан түзүлгөн көптүктөр теориясына таянып негизделген. Ал теориянын негизин, жогоруда айтылгандай, чектүү көптүктөр жана өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк түшүнүктөрү түзөт. Ал теория боюнча, натуралдык сандардын катарындагы ар бир сан өзүнөн мурдагы турган сандан ага бирди кошуу менен келип чыгат. Б.а: ал көптүк чексиз (Ар кандай чектүү көптүккө бир элемент кошуу менен ага эквиваленттүү болбогон экинчи бир чектүү көптүк келип чыгат).

Натуралдык сан түшүнүгүнүн пайда болушу математика илиминин өнүгүшүнө эң чоң бурулуш жасап, чоң түрткү берди. Сандарды алар келип чыккан конкреттүү маселелерге көз карандысыз кароого мүмкүнчүлүк түзүлдү. Ошентип, сандар жөнүндөгү теориялык илим, «математиканын падышасы»– «**арифметика**» пайда болгон.

14. Натуралдык сандардын көптүгүндөгү иреттүүлүк катнаштары.

А жана В чектүү көптүктөрү белгисин. А көптүгүн аныктаган сан а, ал эми В көптүгүнө туура келген натуралдык сан b болсун. Бул көптүктөрдүн арасында төмөнкү катнаштыктардын бири гана орун алышы мүмкүн:

а) А жана В көптүктөрү тең кубаттуу: А~В, б) алар тең кубаттуу эмес. Бул учурда A көптүгү B га камтылган кандайдыр бир өздүк көптүкчөгө тең кубаттуу же B көптүгү A га камтылган өздүк көптүкчө менен тең кубаттуу болушу гана мүмкүн.

Эгер A жана B көптүктөрү тең кубаттуу болсо, анда a жана b натуралдык сандары барабар деп айтылат жана $a=b$ деп жазылат. Натуралдык сандардын көптүгүндөгү барабар катнашы төмөнкү касиеттерге ээ болот:

1. *Рефлексивдүү:* $a=a$. Себеби $A\sim A$.
2. *Симметриялуу:* Эгер $a=b$ болсо, анда $b=a$ болот. Чындыгында $a=b$ болгондуктан $A\sim B$ болот. Тең кубаттуулуктун (эквиваленттүүлүгү) катнашы симметриялуу болгондуктан $B\sim A$ болду. Демек, $b=a$.
3. *Транзитивдүү:* Эгер $a=b$, ал эми $b=c$ болсо, анда $a=c$ болот. Бул касиет да тең кубаттуулуктун транзитивдүүлүгүнөн келип чыгат.

A жана B көптүктөрү тең кубаттуу эмес болсун, анда A көптүгү B нын өздүк көптүкчөсү менен тең кубаттуу болот. Бул учурда a саны b санынан кичине деп айтылат жана $a<b$ деп жазылат. Же b саны a дан чоң болот деп да айтылып $b>a$ түрүндө жазылат.

$a<b$ катнашы натуралдык сандардын көптүгүндө катуу иреттүүлүк катнашы болот, себеби ал төмөнкү касиеттерге ээ:

1. $a<a$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай эч кандай натуралдык сан жок, себеби, өзүнүн көптүкчөсү менен тең кубаттуу болгон эч кандай чектүү A көптүгү табылбайт.
2. Эгер $a<b$ болсо, анда $b<a$ болбойт. Чындыгында $a<b$ болгондуктан A көптүгү B нын өздүк көптүкчөсү менен тең кубаттуу. Бир эле мезгилде B көптүгү да A нын өздүк көптүкчөсүнө теңкубаттуу боло албайт, б.а. $b<a$ болушу мүмкүн эмес.
3. Эгер $a<b$, ал эми $b<c$ болсо, анда $a<c$ болот, б.а. бул катнаштык транзитивдүү. Бул, касиеттерин чын экендигине жогоркудай эле талкуулардын негизинде ишенүүгө болот.

Натуралдык сандардын көптүгүндөгү $a<b$ катнашы менен жүргүзүлгөн катуу иреттүүлүк сызыктуу иреттүүлүк болот, себеби ар кандай эки түрдүү a жана b сандары үчүн же $a<b$, же $a>b$ болот.

15. Натуралдык сандар көптүгүнүн касиеттери.

1. Мурдагы пунктта $\underline{a<b}$ катнашы натуралдык сандардын көптүгүндө сызыктуу иреттүүлүк катнашы болору такталды. Демек, бардык натуралдык сандардын көптүгү N сызыктуу иреттелген көптүк болот. Эгер натуралдык сандардын кичинеси

мурда келе тургандай кылып жайгаштырсак, анда бир, эки, үч, төрт, ж.б. деген натуралдык сандардын катары, келип чыгат. Эгерде шарттуу белгилерди пайдаланып жазсак 1,2,3,4,... катары пайда болот. Натуралдык сандардын эң кичинеси бар жана ал бир саны болот.

2. Натуралдык сандардын көптүгү чексиз көптүк болот, себеби ал өзүнө тең кубаттуу болгон көптүкчөнү камтыйт. Андай көптүкчөгө мисал болуп так натуралдык сандардын көптүгү эсептелет.
3. Рационалдык сандардын көптүгү «кичине» катнаштыгы аркылуу сызыктуу иреттелген көптүк экендигине ишенүүгө болот. Эгер бул көптүктөн каалаган эки рационалдык сан алсак ($\frac{1}{2}$ жана $\frac{1}{3}$), анда $\frac{1}{3}$ ден чоң, бирок $\frac{1}{2}$ ден кичине болгон үчүнчү бир рационалдык санды табууга болот б.а.

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

Ошондуктан рационалдык сандардын көптүгүн өзүнө жыш көптүк деп аташат. Ошондой эле мындай көпүктүргө анык сандардын көптүгү, сан огундагы чекиттердин көптүгү, ж.б. да мисал боло алышат. Мындай касиетке натуралдык сандардын көптүгү ээ эмес, б.а. каалаган эки натуралдык сандын ортосунан үчүнчү бир натуралдык санды табууга мүмкүн эмес. Мисалы, 7 жана 8 натуралдык сандарынын ортосунда эч кандай натуралдык сан жок. Ошондуктан, натуралдык сандардын көптүгү **дискреттүү** (өзүнө жыш эмес) болот. Ал эми рационалдык сандардын көптүгү дискреттүү эмес.

Демек, натуралдык сандардын көптүгү **чексиз, сызыктуу иреттелген** жана **дискреттүү** көптүк болот.

Практикада дайыма эле бардык натуралдык сандардын катары менен эмес, анын белгилүү бөлүктөрү: {1,2,3,4}, {1,2,3,4,5,6,7,8,9} {1,2,3, ... , 100}, ж.б. менен иш алып барууга туура келет. Бул көптүктөр **натуралдык сандардын кесиндилери** деп аталышат, жана Na деп белгиленет.

<u>Аныктоо</u>: Натуралдык сандардын катарынын Na кесиндиси деп а дан ашпаган натуралдык сандардын көптүгү аталат.

Мисалы, N5={1,2,3,4,5}, N95={1,2,3,...,95}.

Берилген аныктоонун негизинде көптүктүн элементтерин **эсептөө (саноо)** процессинин маңызын ачып көрсөтүүгө болот.

A={m,n,k,t,l} көптүгүнүн элементтерин эсептөө учурунда анын ар бир элементине N5 кесиндисинен бир гана сан туура келтирилет. Б.а. A жана N5 көптүктөрүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк орнотулат.

Аныктоо: A чектүү көптүгүнүн элементтерин эсептөө (саноо) деп, ал көптүк менен Na кесиндисинин ортосунда өз ара бир маанилүү туура келтирүүчүлүк орнотуу аталат.

Мында a саны A көптүгүнүн **элементтеринин саны** деп аталат жана n(A)=a деп жазылат. Бул сан **бирөө гана** болуу менен **эсептик натуралдык сан** деп аталат. Алар: бир, эки, үч, төрт, беш, ж.б.

Берилген көптүктүн элементтерин саноодо төмөнкү принциптер сакталышы зарыл:

1. Саноонун натыйжасы саноо тартибине көз каранды эмес;
2. Саноо учурунда көптүктүн айрым элементтерин эки жолу саноого же таштап кетүүгө болбойт.

Бул эрежелер саноо процессинин аныктоосунан келип чыгары анык. Ушундай жөнөкөйлөтүлгөн деңгээлде башталгыч класстын окуучуларына берилет.

Көптүктүн элементтери саноо учурунда белгилүү тартипте иреттелишет. Бул учурда **ирettик натуралдык сандар** келип чыгышат. Алар: *биринчи, экинчи, үчүнчү*, ж.б.

Эсептик жана ирettик сандар тиешелүү түрдө **канча** жана **канчанчы** деген суроолорго жооп беришет.

16. Пеанонун аксиоматикасы.

(Д.Пеано– XIX кылым, Италия)

1. Ар бир n натуралдык саны үчүн андан түздөн түз кийин турган натуралдык сан бар.
2. Эгер p жана q сандары бир эле n санынан түздөн түз кийин турса, анда p=q.

Бул 1-2 аксиомалардан: ар бир n натуралдык санынан кийин бир гана n' натуралдык саны келет.

3. Эч бир сан, эки башка натуралдык сандардан түздөн түз кийин келбейт. Б.а. эгер $m' = n'$ болсо, анда m=n болот.
4. Натуралдык сандардын көптүгүндө бир да натуралдык сандан кийин турбаган 1 саны бар. Б.а. натуралды сандардын көптүгүндө эң биринчи турган (эң кичине) натуралдык сан– бул 1.

5. Эгер N натуралдык сандардын көптүгүнө камтылган A көптүгү 1 санын жана ар бир n натуралдык саны менен бирге андан кийинки турган n' санын кармап турса, анда A=N болот.

5-аксиома практикада бир топ айтылыштарды далилдөө үчүн көп колдонулат жана аталган ыкма менен далилдөө **математикалык индукция методу** деп аталат.

Мисалы: Ар кандай $n \in N$ үчүн $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Бул формуланын тууралыгын математикалык индукция методун колдонобуз. Б.а.

1. $n=1$ үчүн формула чын экендиги анык. Б.а. $1=1^2$.
2. $n=k$ үчүн туура болсун. б.а. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ болсун деп алып, анын $n=k+1$ үчүн да туура экендигин далилдейбиз. Б.а. $1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$
   Мындан, $k^2+2k+1=(k+1)^2$, демек берилген формула ар кандай n натуралдык саны үчүн туура.

17. Нөл саны. Терс эмес бүтүн сандардын көптүгү.

Жогоруда ар бир чектүү көптүккө бир гана натуралдык сан туура келээрин көрдүк. Бирок, практикада чектүү көптүктөрдүн башка да эч кандай элемент кармап турбаган көптүктөрдүн классы бар экендиги белгилүү. Андай бош көптүктөргө туура келүүчү эч кандай натуралдык сан жок. Ошондуктан, бош көптүккө туура келүүчү «жаңы» санды киргизүү зарылчылыгы пайда болот.

Бардык бош көптүктөр өз ара тең кубаттуу болушуп, өздөрүнчө бош көптүктөрдүн классын түзөт. Бул класс **нөл** санын мүнөздөйт жана ал шартуу түрдө **«0»** деп жазылат. Нөль сөзү латындын nullum («эч нерсе эмес») деген сөзүнөн алынган. Илимге 15- кылымда киргизилген. Нөл саны V кылымдарда индиялыктар тарабынан киргизилген деген да маалыматтар бар.

N жана {0} көптүктөрүнүн биригүүсү терс эмес· бүтүн сандардын көптүгүн түзөт:

$$N \cup \{0\} = Z_0$$

Ал сандын катары: 0, 1, 2, 3, 4,5, ... «Барабар», «чоң», «кичине» катнаштыктары натуралдык сандардын көптүгүндө кандай аныкталса Z_0 көптүгүндө да ошондой эле аныкталышат.

V-ГЛАВА

Терс эмес бүтүн сандар менен жүргүзүлүүчү арифметикалык амалдар.

1.Кошуу амалы жөнүндө түшүнүк.

Сумманын жашоосу жана жалгыздыгы.

Өз ара кесилишпеген A={m, n, k, t} жана B={a, в, c} көптүктөрүнүн биригүүсү AUB= {m, n, k, t, a, в, c} көптүгүн пайда кылары ачык. Эгер бул көптүктөрдүн элементтеринин сандарын тапсак n(A)=4, n(B)=3, n(AUB)=7 болот. Пайда болгон сандарды салыштырып жана бириктирүү операциясын эске алып 7 санын 4 жана 3 сандарынын суммасы деп аташат жана n(A)+n(B)=n(AUB) же 4+3=7 деп жазышат.

Аныктоо: Өз ара кесилишпеген A жана B көптүктөрүнүн элементтеринин саны болгон а жана в терс эмес бүтүн сандарынын **суммасы** деп, ал көптүктөрдүн бирүгүүсүнүн элементтеринин саны аталат.

Эгер n (AUB)=c болсо, анда n(A) + n(B) = n(AUB) же а + в = c деп жазылат мында, a=n(A), в=n(B) жана n(AUB)=c. Сандардын суммасын табуу операциясы (амалы) **кошуу** деп аталат. Кошуу амалынын компоненттери

а жана в – **кошулуучулар,**

с же а + в – **сумма.**

Берилген аныктоодо бириктирилүүчү A жана B көптүктөрүнүн кесилишпеген болушу эмне үчүн зарыл экендигин көрсөтүү үчүн төмөнкү мисалды карап көрөлү:

Берилсин A={a, в, c, d} жана B={a, m, к} көптүктөрү. Мында n(A)=4, n(B)=3, A∩B = {a}. Анда AUB = {a,в,c,d,m,к}, n(AUB) = 6 болот. Демек, n(A)+n(B)≠n(AUB) же 4+3≠6 болуп калат. Ошондуктан бирүгүүчү көптүктөрдүн кесилишпеген болушу зарыл. Эгер алар кесилишкен болсо, анда n(AUB)=n(A)+n(B)−n(AUB)

Үч жана андан ашык сандардын суммасы төмөнкүчө табылат:

$a_1 + a_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3$

$a_1 + a_2 + a_3 = [(a_1 + a_1) + a_3] + a_4$, ж.б.

Теорема: Ар кандай а жана в терс эмес бүтүн сандарынын суммасы дайыма жашайт жана бироо гана.

Чындыгында, а жана в терс эмес бүтүн сандары берилсе, анда n(A)=a, n(B)=в жана n(AUB)=c болгондой A жана B көптүктөрүн түзүүгө болот. Биригүүнүн аныктоосу боюнча AUB көптүгүн табууга болот, демек, n(AUB) = c саны табылат. Бирок, сумманын аныктоосу боюнча c саны а менен в нын суммасы. б.а.

n(A)+n(B)=n(AUB)

$a+в=c$

Демек, сумма дайыма бар болот. Сумманын жалгыздыгы көптүктөрдүн бирүгүүсү бир гана маанилүү экендигинен келип чыгат:

Жогорку теоремадан төмөнкүдой натыйжалар келип чыгат:

1. Эгер а=в болсо, анда а+с=в+с болот. Чындыгында, эгер а жана в терс эмес бүтүн сандары өз ара барабар болсо, анда алар бир эле сан болушат. Ошондуктан а+с жана в+с суммаларындагы кошулуучулары да бирдей эле сандар. Демек, а+с=в+с.
2. Эгер а=в жана c=d болсо, анда a+c=в+d. Бул айтылыш жогорку сыяктуу эле талкуулардын негизинде далилденет.

Өткөн пункттарда "чоң" жана "кичине" катнаштыктарынын терс эмес бүтүн сандардын көптүгүндө аныкталышы камтылган көптүк жана тең кубаттуу көптүктөр түшүнүктөрү аркылуу берилген. Бул катнаштыктарды терс эмес бүтүн сандардын суммасынын аныктоосуна таянып, башкача аныктоого болот. б.а.

<u>Аныктоо</u>: Эгерде а=в+k барабардыгы аткарыла тургандай k натуралдык саны табылса, анда а терс эмес бүтүн сан в терс эмес бүтүн санынан чоң деп аталат жана а > в деп жазылат.

Мисалы: 999 > 995, себеби 999=995+4.

<u>Аныктоо</u>: Эгер а=в+k барабардыгы аткарыла тургандай k терс эмес бүтүн саны табылса, анда а терс эмес бүтүн саны в терс эмес бүтүн санынан чоң же барабар деп аталат, жана а≥в деп жазылат. Бул учурда в саны а санынан кичине же барабар деп да айтышат б.а. в≤а болот.

Мында k = 0 болгондо а = в болот.

Мисалы: $45 \geq 45$, себеби $45 = 45 + 0$

$45 \leq 45$, себеби $45 = 45 + 0$

$45 \geq 42$, себеби $45 = 42 + 3$

$45 \leq 42$, себеби $45 = 42 + 3$

2. Кошуу амалынын касиеттери.

1°. Кошуу амалынын орун алмаштыруу касиети (сумманын **коммутативдүүлүгү**):

<u>Теорема</u>: Ар кандай а жана в сандары үчүн а + в = в +а болот. б.а. Кошуучулардын ордун алмаштыруудан сумма өзгөрбөйт.

<u>Далилдөө</u>: Ар кандай А жана В көптүктөрү үчүн орун алмаштыруу касиети аткарылат б.а. $A\cup B=B\cup A$. Барабар көптүктөр бирдей сандагы элементтерге ээ болгондуктан $n(A\cup B)=n(B\cup A)$. (а)

Ошондой эле $n(A)=a$, $n(B)=в$, $A\cap B=\varnothing$ болгондой А жана В көптүктөрүн табууга болот.

Анда $n(A\cup B)=n(A)+n(B)=a+в$ (1)

$n(B\cup B)=n(B)+n(A)=в+a$ (2)

Демек, (а), (1) жана (2) барабардыктарынан

$$a+в=в+a$$

экендиги келип чыгат

Бул касиетке ар кандай сандагы кошулуучулардын суммасы да ээ болот.

Мисалы: $12 + 11 + 25 = 12 + 25 + 11 = 11 + 12 + 25 =\dots$

2°. Кошуу амалынын топтоштуруу касиети (сумманын ассоциативдүүлүгү):

Теорема: Ар кандай а, в жана с сандары үчүн $(a+в)+c=a+(в+c)$ болот, б.а. бир нече сандардын суммасын табууда жанаш а турган кошулуучуларды алардын суммасы менен алмаштырууга болот.

Далилдөө: Өз ара кесилишпеген A, B, C, көптүктөрү берилсин жана $n(A)=a$, $n(B)=в$, $n(C)=c$ болсун A, B, C лар жалпы элементке ээ болбогондуктан $A\cup B$ жана C, A жана $B\cup C$ көптүктөрү да кесилишпейт. Ошондуктан

$$n((A\cup B)\cup C)=n(A\cup B)+n(C)=(a+b)+c$$

$$n(A\cup(B\cup C))=n(A)+n(B\cup C)=a+(b+c)$$

Көптүктөрдүн биригүүсүнүн ассоциативдүү болушу белгилүү б.а.

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

же $n((A\cup B)\cup C)=n(A\cup(B\cup C))$.

Анда жогорку барабардыктарды эске алып $(a+b)+c=a+(b+c)$. Бул закондон жана бир нече сандардын суммасынын аныктоосунан $a+в+c=(a+в)+c=a+(в+c)$ барабардыгы келип чыгат.

Акыркы барабардык башталгыч класстардын программасында суммага санды кошуу жана санга сумманы кошуу эрежелери катарында окутулат.

Мисалы, суммага санды кошуу эрежеси конкреттүү мисалдын жана кыймылдуу көрсөтмө куралдын жардамы менен үйрөтүлүп, анын 3 жолу жана эрежеси таныштырылат. б.а.

$(4+3)+2=7+2=9$

$(4+3)+2=4+(3+2)=4+5=9$

$(4+3)+2=(4+2)+3=6+3=9$

Эрежеси: суммага санды кошуу үчүн ал сандарды кошуп, чыккан суммага берилген санды кошуп коюу керек, же ал санды кошулуучулардын бирине кошуп, пайда болгон натыйжаларга экинчи кошулуучуну кошуп коюу керек.

Бул эреженин негизинде (30+20)+5, 65+3, 65+20 сыяктуу туюнтмалардын сан маанисин табуу, эсептөө ыкмаларын үйрөтүү жана калыптандыруу үчүн колдонулат.

Ушул сыяктуу эле, санга сумманын кошуунун үч жолу үйрөтүлүп, төмөндөгүдөй эреже үйрөтүлөт:

Санга сумманы кошуу үчүн ал санга берилген кошулуучулардын суммасын кошуу керек же ал санга берилген сумманын кошулуучуларын удаалаш кошуп коюу жетиштүү.

Бул эреже 3+12, 30+12, 9+6, 27+6 сыяктуу туюнтмалардын сан маанисин табууда эсептөө ыкма катары колдонулат.

Мисалы: 27+6=27+(3+3)=30+3=33

9+6=9+(1+5)=10+5=15

30+12=30+(10+2)=40+2=42

Кошуу амалынын топтоштуруу касиетин бир нече сандардын суммасын табуу үчүн колдонсок.

$a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+a_m+\ldots+a_{n-1}+a_n=(a_1+a_2+\ldots+a_{m-1})+(a_m+\ldots+a_n)$ Мында $1<m\leq n$. «Барабар» катнаштыгы симметриялуу болгондуктан, акыркы барабардыкты төмөнкүчө жазууга болот.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{m-1})+(a_m+\ldots+a_n)= a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+a_m+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

Акыркы формула суммага сумманы кошуу эрежесин берет:

Суммага сумманы кошуу үчүн ал суммалардын кошулууучуларын удаалаш кошуп коюу керек.

Мисалы: (425+52+23)+(243+62)=[(425+52+23)+243]+62

Суммага сумманы кошуу эрежесин орун алмаштыруу касиети менен бирдикте колдонуу эки жана андан коп орундуу сандарды жазуу жүзүндө (мамыча түрүндө) кашуу ыкмасына теориялык негиз болот. Мисалы, 342+435 суммасын эсептөө үчүн аны эң мурда жогорку эрежелерди пайдаланып, оозеки (жолчо түрүндө) аткарылат. б. а.

342+435=(300+40+2)+(400+30+5)=300+40+2+400+30+5=

=300+400+40+30+2+5=(300+400)+(40+30)+(2+5)=700+70+7=777

Кошуу ыкмасы (разряддап кошуу) такталгандан кийин ал сандарды мамыча түрүндө жазып кошуу жолу (формасы) көрсөтүлөт, б.а.

$$\begin{array}{r} 342 \\ +\;\underline{435} \\ 777 \end{array}$$

Ошондой эле кошуу амалынын аталган касиеттери бир нече сандардын суммасын ыңгайлуу жол менен тез эсептөөлөрдө да колдонулат. Мисалы:

$$49+54+51+46+9=(49+51)+(54+46)+9=209.$$

$$1628+530+70+372=(1628+372)+(530+70)=2600.$$

3°. Сумманын монотондуулугу.

Теорема–1: Эгер $а>$ в болсо, анда $а+с>в+с$ болот.

Далилдөө: Эгер $а>в$ болсо, анда $а=в+k$, $k\in N$.

Акыркы барабардыктын эки жагына тең с санын кошуп жана сумманын ассоциативдүүлүгүн пайдаланып $а+с=(в+k)+с=\ =(в+с)+k$ экендигин алабыз.

Мындан $а+с>в+с$, $k\in N$ келип чыгат. б.а. Эгер эки кошулуучу тең чоңойсо, анда алардын суммасы да ошончо бирдикке чоңойот.

Теорема–2: Эгер $а>в$ жана $с>d$ болсо, анда $а+с>\ в+d$: $а,\ в,\ с,\ d\in N$ б.а. Эгер эки кошулуучу n бирдикке, экинчи кошулуучу m бирдикке чоңойсо, анда алардын суммасы $m+n$ бирдикке чоңоет. Мында да $m,n\in N$. Бул теораманын далилдөөсү да мурдагыдай эле жүргүзүлөт.

4°. Сумманын кыскаруучулугу.

Теорема: Эгер $а+с=в+с$ болсо, анда $а=в$ болот.

Далилдөө: Эгер $а+с=в+с$ болсо, анда үч гана учурдун болушу мүмкүн: $а>в$, $а<в$, $а=в$. Эгер $а>в$ болсо, анда үчүнчү касиеттин биринчи теоремасы боюнча $а+с>\ в+с$ болот. Бирок шарт боюнча $а+с=\ в+с$. Демек, $а>в$ болушу мүмкүн эмес. Ошондой эле $а<в$ болушу да мүмкүн эмес. Демек, бир гана $а=в$ болушу мүмкүн.

3. Кошуу амалынын практикада колдонулушу.

Сумманын аныктоосунун жана анын монотондуулук касиеттеринин негизинде кошуу амалы практикада эки гана учурда (жагдайда) колдонулат деген жыйынтык чыгарууга болот:

1) Эки кесилишпеген көптүктөрдү бириктирүүдө (айрым кошулуучулардын суммасын табууда).

Мисалы: «Бегимайда 15 дептер, ал эми Курманжанда 17 дептер болсо, экөөндө биригип канча дептер бар?»

2) Тигил же бул чектүү көптүктү толуктоодо (санды бир нече бирдикке чоңойтууда).

Мисалы: «Берметтин 15 дептери бар, ал эми Урматта ага караганда 3 дептерге көп. Урматтын канча дептери бар?»

4. Терс эмес бүтүн сан менен нөлдүн суммасы.

Теорема: Ар кандай a саны үчүн $a+0=a$ барабардыгы аткарылат.

Далилдөө: Кандайдыр A чектүү көптүгү берилсин жана $n(A)=a$ болсун. Мурдагы өтүлгөндөргө ылайык $A\cup\varnothing=A$ жана $A\cap\varnothing=\varnothing$ экендиги белгилүү. Терс эмес бүтүн сандардын суммасынын аныктоосу боюнча $n(A\cup\varnothing)=n(A)+n(\varnothing)=a+0$. Бирок, $n(A\cup\varnothing)=n(A)=a$, ошондуктан $a+0=a$ болот.

5. Натуралдык сандарды кошуу эрежелери.

Кошуунун таблицасы.

Натуралдык сандардын суммасын табуу же кошуу амалын аткаруу кошулуучулар кандай сандар болушуна карата ар түрдүү ыкмалар менен аткарылат. Ал сандарды кошуу таблицалык жана таблицалык эмес болуп эки топко бөлүнүшөт.

Таблицалык кошууга бир орундуу сандарды кошуу учурлары кирет ($5+2$, $7+3$, $9+6$, $8+7$ ж.б.). аларды кошуу төмөнкү ыкмалар менен жүргүзүлөт:

1) $a+1$: мында сумма номерлөө (саноо) принцибинин негизинде a санынан кийинки турган санга барабар болот. б.а. $3+1=4$, $7+1=8$, $9+1=10$, ж.б.
2) $a+2,+3,+4$: бул учурларда сумма берилген a санына 2,3 жана 4 сандарынын бирдиктерин (составдык бөлүктөрүн) бирден же топтобу менен кошуу ыкмасы аркылуу табылат. б.а. $4+2=4+1+1=5+1=6$

    $4+3=4+1+2$ же $4+2+1=6+1=7$

    $5+4=5+1+3$ же $5+2+2=7+2=9$, ж.б.
3) $a+5,+6,+7,+8,+9$:

    а) суммасы ондуктан ашпаган учурлары кошуу амалынын орун алмашуу касиетин жана таблицанын мурдагы учурларын пайдаланып табылат.

    б.а. $2+5=5+2=7$

    $3+7=7+3=10$, ж.б.

    б) суммасы ондуктан ашкан учурлары санга сумманы кошуу эрежесинин негизинде табылат.

    б.а. $8+5=8+(2+3)=10+3=13$

    $9+6=9+(1+5)=10+5=15$, ж.б.

Натуралдык сандарды кошуунун таблицасы

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

4+8=12– үлгүсү

Таблицалык эмес кошуу төмөнкү учурларга бөлүнүп ар түрдүү ыкмалар менен аткарылыт:

а) тегерек сандарды кошуу– сандарды номерлөөгө негизделип аткарылат. б.а.

$\underline{40+30=70}$ $\underline{500+200=700}$

$4_{\text{онд}}+3_{\text{онд}}=7_{\text{онд.}}$ $5_{\text{жузд}}+2_{\text{жузд}}=7_{\text{жузд.}}$

б) эки, үч, ж.б. орундуу сандарга тегерек сандарды жана бир орундуу сандарды ондуктан өтпөй кошуу суммага санды кошуу эрежесине таянат. б.а.

56+3=(50+6)+3=50+9=59.
56+30=(50+6)+30=80+6=86.
562+7=(560+2)+7=560+9=569.
562+200=(500+62)+200=700+62=762.

Ал эми 3+56, 30+56, 7+562, 200+562 сыяктуу учурлары кошуунун орун алмаштыруу касиетине таянып, жогорку учурларга келтирилет.

в) тегерек сандарга 1, 2, 3, ... орундуу сандарды кошуу (40+3, 400+25, 6000+125,...) сандарды номерлөө (саноо) принцибине гана таянат.

г) эки орундуу сандарга бир орундуу сандарды ондуктан өтүп кошуу санга сумманы кошуу эрежесине негизделет. б.а.

28+3=28+(2+1)=30+1=31
86+7=86+(4+3)=90+3=93.

д) эки орундуу сандарга эки орундуу, үч орундуу сандарга эки орундуу сандарды ондуктан өтпөй кошуу да санга сумманы кошууга таянат. б.а.

43+25=43+(20+5)=63+5=68
432+25=432+(20+5)=452+5=457

кошуу амалын ушуга чейинки учурлары оозеки (жолчо менен) аткарылат.

е) эки, үч, ж.б. орундуу сандарды кошуу сумманы суммага кошуу эрежесинин негизинде жазуу жүзүндө (мамыча менен) аткарылат. б.а.

$$\begin{array}{r}29\\ +\underline{45}\\ 74\end{array}\qquad\begin{array}{r}345\\ +\underline{467}\\ 812\end{array}\qquad\begin{array}{r}6376\\ +\underline{1855}\\ 7231\end{array}$$

Сандарды мамыча түрүндө кошуунун алгоритмасы:

1. Экинчи кошулуучуну биринчи кошулуучунун астына тиешелуу разряддык бирдиктери туура келгендей кылып жазуу.
2. Бирдик разряддарды кошуу. Эгер алардын суммасы ондон ашпаса, аны сумманын биринчи разрядына жазып, кийинки ондуктарды кошуу.
3. Эгер бирдиктердин суммасы ондон ашык же онго барабар болсо, анда ал санды 10+k түрүнө келтирип, k бир орундуу терс эмес бүтүн санын бирдиктердин астына жазуу; бир санын биринчи кошулуучунун ондук разрядына кошуп, ондуктарды кошууга өтүү.
4. Мындай операцияны ондуктарды, жүздүктөрдү, ж.б. кошуу менен улантабыз. Процесс кошулуучулардын эн чоң разряддык бирдиктерин кошуу менен аяктайт.

6. Кемитүү амалы. Айырманын жашоосу жана жалгыздыгы.

$A=\{m,n,l,k,t,u\}$ жана $B=\{m,l,k,u\}$ чектүү көптүктөрү берилсин, мында $B\subset A$, $n(A)=6$, $n(B)=4$ экендиги көрүнүп турат. Эгер В да жок А нын элементтеринен же А нын элементтеринен В нын элементтерин алып таштасак, анда В ны А га чейин толуктоочу B'_A көптүгү пайда болот. б.а. $B'_{A=}\{n, t\}$. Мындан $n(B'_A)=2$. Бул учурда 2 санын 6 жана 4 сандарынын айырмасы деп коюшат.

Аныктоо-1: а жана в терс эмес бүтүн сандарынын айырмасы деп В көптүгүн А көптүгүнө чейин толуктоочу көптүктүн элементтеринин саны аталат, эгерде $B\subset A$, $n(A)=a$, $n(B)=в$ болсо жана ал а-в=с деп жазылат

Мында а − кемүүчү,
в − кемитүүчү,
с же а-в − айырма.

Жогорку мисалда 6−4=2 болот.

Сандардын айырмасын табуу амалы <u>кемитүү</u> деп аталат.

$B'_A \cup B=A$ же $n(B'_A)+n(B)=n(A)$ болгондуктан:

Аныктоо-2: а жана в терс эмес бүтүн сандарынын айырмасы деп, в га кошкондо а саны келип чыга турган с саны аталат. Б.а. а-в=с болот, эгерде а=в+с болсо гана.

Мисалы: 7-3=4, себеби 7=3+4

Экинчи аныктоодон кемитүү амалына мектеп курсунда берилүүчү төмөнкүчө аныктоо берүүгө болот:

Кошулуучулардын бири (в) жана сумма (а) аркылуу экинчи кошулуучуну (с) табуу амалы <u>кемитүү</u> деп аталат.

Айырма түшүнүгүнүн биринчи жана экинчи аныктоолору тең күчтүү экендигине жогорку талкуулардын негизинде оңой эле ишенүүгө болот.

Теорема (айырманын жашоосу жөнүндө):

а-в айырмасынын жашоосу үчүн а≥в болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө:

а) Жетиштүү шарты: Эгер а≥в болсо, анда а=в+k барабардыгы аткарыла тургандай k терс эмес бүтүн саны табылат. Мындан экинчи аныктоо боюнча k=а-в болот. Б.а. а-в айырмасы бар болот.

б) Зарыл шарты: Айталы а-в айырмасы бар болсун. Анда а-в=k– терс эмес бүтүн саны табылат. Мындан а=в+k же а≥в экендиги келип чыгат.

Теорема (айырманын жалгыздыгы жөнүндө):

Эгер а-в айырмасы бар болсо, анда ал бирөө гана.

Далилдөө: Айталы айырма экөө болсун. Б.а. а-в=c_1 жана а-в=c_2, $c_1 \neq c_2$ болсун. Анда бул барабардыктардан айырманын аныктоосун пайдаланып, а=в+c_1 жана а=в+c_2 экендигин алабыз. «Барабар» катнаштыгынын транзитивдүүлүгүнөн в+c_1=в+c_2 болот. Сумманын кыскаруучулук касиетин пайдаланып, $c_1=c_2$ болору келип чыгат.

Демек, мындай карама-каршылык а-в айырмасынын эки маанилүү болгондугун тегинге чыгарат. Б.а. эгер а-в айырмасы бар болсо, анда ал бирөө гана.

7. Кошуу жана кемитүү амалдарынын натыйжалары менен алардын компоненттеринин өз ара байланыштары.

а) Эгер m жана n сандарынын суммасы s болсо m+n=s жазылары белгилүү. Мындан айырманын экинчи аныктоосу боюнча m=s-n же n=s-m экендиги келип чыгат. Б.а.

> Эгер суммадан кошулуучулардын бирин кемитсе, анда экинчи кошулуучу келип чыгат.

б) Эгер а-в=р болсо, анда айырманын экинчи аныктоосунан а=в+р болот. Демек,

> кемүүчү айырма менен кемитүүчүнүн суммасына барабар болот.

в) а=в+р барабардыгынан ошол эле аныктоо боюнча в=а-р экендиги келип чыгат. Б.а.

> кемитүүчү кемүүчүдөн айырманы кемиткенге барабар.

Бул байланыштар айрым теңдемелерди алгебралык жолду пайдаланбастан чыгарууга мүмкүнчүлүк берет.

Мисалы: 260-(х+70)=40

Теңдемеде белгисиз кемитүүчүдө болгондуктан, ал кемитүүчү эреже боюнча

$$x+70=260-40$$

же $x+70=220$ болот.

Мында х кошулуучу болгондуктан

$$x=220-70$$

же $x=150$

8. Суммадан санды кемитүү.

Айырманы санга жана санды айырмага кошуу.

Теоремалар: Эгер а≥с болсо, анда (а+в)-с=(а-с)+в

Эгер в≥с болсо, анда (а+в)-с=а+(в-с)

Теореманын биринчисин далилдейли:

Эгер а≥с болсо, анда а-с=k ($k\in N_0$) деген айырма бар болот. Мындан а=k+с экендиги келип чыгат. Анда

$$(a+в)-c=(k+c+в)-c=k+в=(a-c)+в$$

Ушул сыяктуу эле теореманын экинчи бөлүгүн да далилдөөгө болот.

Бул теоремалардан: суммадан санды

> кемитүү үчүн ал санды андан чоң болгон кошулуучудан кемитип, экинчи кошулуучуну өзгөрүүсүз калтыруу керек– деген эреже келип чыгат.

Мисалы: (60+7)-40=(60-40)+7=27

(60+7)-5=60+(7-5)=62

«Барабар» катнаштыгынын симметриялуулугунан жогорку формулаларды төмөнкүчө жазууга болот:

а) (а-с)+в=(а+в)-с. б.а.

санды айырмага кошуу үчүн ал санды кемүүчүгө кошуп, пайда болгон суммадан кемитүүчүнү кемитип коюу керек.

Мисалы: (13859-562)+141=(13859+141)-562=13438

б) а+(в-с)=(а+в)-с. б.а.

айырманы санга кошуу үчүн ал санга кемүүчүнү кошуп, суммадан кемитүүчүнү кемитип коюу керек.

Мисалы: 903+(5007-478)=(903+5007)-478=5532

9.Сандан сумманы жана айырмадан санды кемитүү.

Теорема-1: Эгер а≥в+с болсо, анда

а-(в+с)=(а-с)-в

же а-(в+с)=(а-в)-с болот. б.а.

сандан сумманы кемитүү үчүн ал сандан берилген сумманын кошулуучуларын удаалаш кемитип коюу керек.

Теореманын биринчи бөлүгүн далилдейли:

Шарт боюнча а≥в+с болгондуктан а-(в+с) айырмасы жашайт. б.а. а-(в+с)=k, $k\in N_0$. Анда а=k+(в+с)=(k+в)+с болот. а=(k+в)+с барабардыгынан айырманын аныктоосу боюнча k+в=а-с же мындан k=(а-с)-в.

«Барабар» катнаштыгы транзитивдүү болгондуктан а-(в+с)= =(а-с)-в болору келип чыгат.

Ушул сыяктуу эле экинчи формуланы да далилдөөгө болот.

Мисалы: 3856-(856+391)=(3856-856)-391=2609

7921-(1457+921)=(9721-921)-1457=5543

Теорема-2: Эгер а-в≥с болсо анда (а-в)-с=(а-с)-в. б.а. айырмадан санды кемитүү үчүн ал санды кемүүчүдөн кемитип, чыккан айырмадан кемитүүчүнү кемитип коюу керек.

Чындыгында, а-в≥с болгондуктан а-с≥в жана а≥в болот. Эгер, (а-в)-с=k деп белгилесек анда а-в=k+с болот. Анда а=(k+с)+в=(k+в)+с же а =(k+в)+с барабардыгынан а-с=k+в жана (а-с)-в=k келип чыгат Демек, (а-в)-с=(а-с)-в болот.

Биринчи теореманын экинчи бөлүгүнөн «барабар» катнаштарынын симметриялуу экендигин эске алып (а-в)-с= =а-(в+с) болору келип чыгат. Демек айырмадан санды кемитүүнүн үч жолу бар экен б.а.

а) туюнтмадагы амалдарды тартиби менен аткаруу

(5786-786)-3241=5000-3241=1759

в) (а-в)-с=(а-с)-в формуласын колдонуу:

(596-137)-396=(596-396)-137=63

с) (а-в)-с=а-(в+с) формуласын колдонуу

(410-250-150)=410-(250+150)=410-400=10

10. Сандан айырманы кемитүү.

Теорема-1. Эгер $a+c \geq в$ жана $в \geq c$ болсо, анда $a-(в-c)=(a+є)-в$.

Далилдөө: $a+c \geq в$ болгондуктан $a \geq в-c$. Эгер $k=a-(в-c)$ деп белгилесек, анда $a=k+(в-c)=(k+в)-c$. Же, айырманын аныктоосун пайдаланып $a=(к+в)-c$ барабардыгынан $k+в=a+c$. мындан $k=(a+c)-в$ келип чыгат. Демек, к га карата транзитивдүүлүктү пайдаланып $a-(в-c)=(a+c)-в$ экендигин алабыз.

Бул теоремадан: сандан айырманы кемитүү үчүн ал санга кемитүүчүнү кошуп, пайда болгон суммадан кемүүчүнү кемитүү керек– деген эреже келип чыгат. Мисалы:

615-(378-185)=(615+185)-378=800-378=422.

Теорема-2: Эгер $a \geq в$ жана $в \geq c$ болсо, анда $a-(в-c)=(a-в)+c$ болот.

Чындыгында, жогорку теореманы пайдаланып $a-(в-c)=(a+c)-в$ экендигин, ал эми санды айырмага кошуу эрежеси боюнча $(a-в)+c=(a+c)-в$ болгондуктан, акыркы эки барабардыктан $a-(в-c)=(a-в)+c$ экендиги келип чыгат. Бул теоремадан: сандан айырманы кемитүү үчүн ал сандан кемүүчүнү кемитип, чыккан айырмага кемитүүчүнү кошуп коюу керек. Мисалы:

2569-(569-175)=(2569-569)+175=2000+175=2175

11. Кемитүү амалынын практикада колдонулушу.

Кемитүү амалы өзүнүн мазмунуна жараша практикада төмөнкү жагдайларда гана колдонулат:

1) Сумма жана кошулуучулардын бири аркылуу экинчи кошулуучуну табууда. Мисалы: «Эки яшикте 35 кг алма бар. Эгер алардын биринде 17 кг алма болсо экинчи яшикте канча алма бар?»
2) Санды бир нече бирдикке азайтууда. Мисалы: «Агасы 30 жашта, ал эми иниси андан 4 жашка кичүү. Иниси канча жашта?»
3) Сандарды (чоңдуктарды) айырмалуу салыштырууда. Мисалы: «Агасы 30 жашта ал эми иниси 26 жашта. Агасы инисинен канчага улуу же иниси агасынан канчага кичүү?»

12. Кемитүү эрежелери.

Натуралдык сандарды кемитүү-кошуу амалы сыяктуу эле таблицалык жана таблицасыз болуп эки топко бөлүнүп аткарылат.

1. Таблицалык кемитүү– бир орундуу сандардан бир орундуу сандарды кемитүү жана айырмасы бир орундуу болгон эки орундуу сандардан бир орундуу сандарды кемитүү учурлары. Бул учурда да айырманы табуу эрежеси конкреттүү учурга байланыштуу болот.
   1) бир орундуу сандардан 1, 2, 3, 4 сандарын кемитүү– бирден же топ-тобу менен кемитүү жолу менен аткарылат б.а.

      5-2=5-1-1=4-1=3

      7-4=7-1-3=7-2-2=3

   2) 5, 6, 7, 8, 9, сандарын кемитүү– айырманын экинчи аныктоосуна же кошуу менен кемитүүнүн байланышына негизделет б.а.

      7-5=2, себеби 5+2=7

      10-7=3, себеби 7+3 =10

      же 7+3=10 болгондуктан 10-7=3

      8+2=10 болгондуктан 10-8=2 болот.

   3) айырмасы бир орундуу болгон эки орундуу сандан бир орундуу санды кемитүү же ондуктан өтүп кемитүү– бул сандан сумманы кемитүү эрежесине таянат б.а.

      12-5=12-(2+3)=(12-2)-3 =7

      17-8=17-(7+1)=(17-7)-1=9

Кемитүү таблицасы үчүн кошуунун таблицасы эле пайдаланылат. Бирок таблицаны алгачкы учурларда гана пайдаланып, негизинен натыйжаларды эске тутуу зарыл.

2. Таблицасыз кемитүү– жогорку учурлардан башка натуралдык сандарды кемитүүнүн бардык учурлары. Алар да кемитүүгө катышкан компоненттерге жараша ар түрдүү ыкмалар менен аткарылат б.а.
   1) тегерек сандарды кемитүү– номерлөө жана таблицалык кемитүүгө негизделип аткарылат:

$$\frac{60-40=20}{6_{\text{онд}}-4_{\text{онд}}=2_{\text{онд}}} \qquad \frac{7000-5000=2000}{7_{\text{мин}}-5_{\text{мин}}=2_{\text{мин}}}$$

   2) 2, 3, 4, ж.б. орундуу сандардан алардын разряддык бирдиктерин кемитүү номерлөөнүн негизинде гана оозеки аткарылат:

27-7 =20,   316-300=16
27-20=7,   316-16=300 ж.б.

3) эки орундуу сандардан бир орундуу (ондуктан өтпөй) жана тегерек ондуктарды кемитүү суммадан санды кемитүү эрежесине таянат, б.а.

56-3=(50+6)-3=50+(6-3)=53
56-30=(50+6)-30=(50-30)+6=26
70-4=(60+10)-4=60+(10-4)=66

4) эки орундуу сандардан бир орундуу (ондуктан өтүп) сандарды жана тегерек орундуктардан эки орундуу сандарды кемитүү сандан сумманы кемитүү эрежесинин негизинде аткарылат:

65-7=65-(5+2)=(65-5)-2=58
60-15=60-(10+5)=(60-10)-5=45

5) эки орундуу сандардан эки орундуу сандарды кемитүү– суммадан сумманы кемитүү эрежесинин негизинде оозеки же мамыча түрүндө аткарылат:

45-23=(40+5)-(20+3)=(40-20)+(5-2)=20+2=22
45-28=(30+15)-(20+8)=(30-20)+(15-8)=10+7=17

же мамыча түрүндө:

$$\begin{array}{r} -45 \\ \underline{23} \\ 22 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -45 \\ \underline{28} \\ 17 \end{array}$$

Ушул эле эсептөөлөрдү сандан сумманы кемитүү эрежесине таянып да аткарууга болот:

45-23=45-(20+3)=(45-20)-3=25-3=22
45-28=45-(20+5+3)=(45-20)-5-3=20-3=17

6) Кемитүүнүн 380-50,380-200, 700-80, 640-60 сыяктуу учурлары да жогорку эрежелерге негизделишет б.а

380-50=(300+80)-50=300+(80-50)=330
700-80=(600+100)-80=600+(100-80)=620
640-60=640-(40+20)=(640-40)-20=580

7) 3,4, ж.б орундуу сандарды кемитүү суммадан сумманы кемитүү эрежесинин негизинде мамыча түрүндө аткарылат:

$$\begin{array}{r} -468 \\ \underline{156} \\ 312 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -468 \\ \underline{175} \\ 293 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -45431 \\ \underline{16542} \\ 28789 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -200001 \\ \underline{19876} \\ 180125 \end{array}$$

Көп орундуу сандарды кемитүү алгоритмасы (ондук эсептөө системасында) жалпы жөнүнөн төмөнкүчө болот:

1. Кемитүүчүнү кемүүчүнүн астына тиешелүү разряддык бирдиктери туура келгендей кылып жазуу.
2. Эгер кемитүүчүнүн бирдиги кемүүчүнүн бирдигинен ашпаса, анда кемитүүнү аткарып, кийинки разрядка өтүү.
3. Эгер кемитүүчүнүн бирдиги кемүүчүнү бирдигинен чоң болсо жана кемүүчүнү ондук разряддык цифрасы нөльдөн айырмаланган болсо, анда ондук разряддык цифрасын бирге азайтып, бирдиктеринин санын 10го чоңойтобуз. Пайда болгон бирдиктердин суммасынан кемитүүчүнүн бирдигин кемитип, алардын алдына жазабыз да кийинки разрядка өтүү керек.
4. Эгер кемитүүчүнүн бирдиги кемүүчүнү бирдигинен чоң болуп, ал эми кемүчүүнүн ондук, жүздүк, ж.б. цифралары нөль болсо, анда бирдик разряддан жогору турган эң биринчи нөльдөн айырмаланган разряддык бирдикти бирге азайтып, бирдикке чейинки разряддык бирдиктерди 9 га, ал эми бирдикти 10 го чоңойтуп бирдиктерди кемитүү жана алардын алдына жазуу керек. Кийинки разряддык бирдикке өтүү.
5. Кийинки разрядка өткөндө да 2-3 пункттардагы операцияларды аткаруу.
6. Бул процесс кемүчүүнүн эң чоң разряддык бирдигинен кемитүү аткарылганда гана аяктайт.

13. Көбөйтүү амалы.
Көбөйтүндүнүн жашашы жана жалгыздыгы.

Төмөнкү практикалык маселени карап көрөлү: «Дептердин баасы 2 сом болсо, анда 2, 4, 7, 95, …, n дептер канча турат?».

Бул маселени кошуу амалы менен чыгарууга боло тургандыгы белгилүү, б.а.

$2+2=4$ (сом)

$2+2+2+2=8$ (сом)

$2+2+2+2+2+2+2=14$ (сом)

$$\underbrace{2+2+\ldots+2}_{95 \text{ жолу}}=190 \text{ (сом)}$$

$$\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n \text{ жолу}}=2n \text{ (сом)}$$

Пайда болгон туюнтмалардын өзгөчөлүгү– бардык кошулуучулар бирдей. Эгер кошулуучулардын саны көп болсо, анда алардын суммасын кошуу амалы менен табуу өтө ыңгайсыз. Ошондой эле кошулуучулардын саны 0 же 1 ге барабар болсо «берилген сандагы кошулуучулардын суммасын табуу» деген сүйлөм маанисиз сыяктуу болот. Ошол себептерден жогорку сыяктуу практикалык маселелерди чыгаруу үчүн үчүнчү арифметикалык амалды киргизүү зарылчылыгы келип чыгат.

Аныктоо 1: a жана n терс эмес бүтүн сандарынын көбөйтүндүсү деп төмөнкү шарттарды канааттандыруучу c=a·n саны аталат:

1) Эгер n>1 болсо, анда a·n=$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ жолу}$.

2) Эгер n=1 болсо, анда a·1=a.

3) Эгер n=0 болсо, анда a·0=0.

Мында, a– көбөйүүчү (кошулуучу),

n– көбөйтүүчү (кошулуучулардын саны),

c же a·n– көбөйтүндү (сумма),

a жана n– көбөйтүлүүчүлөр

«·» же «x»– көбөйтүү белгиси.

Демек, жогорку маселедеги туюнтмаларды 2·2, 2·4, 2·7, 2·95, 2·n деп жазууга болот.

Бул аныктоонун мазмунун көптүктөр теориясынын негизинде төмөнкүчө түшүндүрүүгө болот: Эгер ар биринде a дан элементи бар, өз ара кесилишпеген $A_1, A_2, \ldots, A_n$ көптүктөрүнүн биригүүсү a·n элементтен турат. Демек, a·n көбөйтүндүсү– бул a дан элементи бар өз ара кесилишпеген n көптүктүн биригүүсүнүн элементтеринин саны. Ал эми a·1=a жана a·0=0 барабардыктары шарт боюнча кабыл алынган.

Сандардын көбөйтүндүсүн табуу амалы көбөйтүү деп аталат. Же, барабар кошулуучулардын суммасын табуу амалы көбөйтүү амалы деп аталат. Демек, көбөйтүү– бул кошуу амалынын айрым бир учуру болот. Бирок, көбөйтүү амалын кошуу амалынан көз карандысыз да аныктоого болот, б.а.

Аныктоо 2: Эгер A жана B чектүү көптүктөрү берилип n(A)=a, n(B)=b болсо, анда a жана b терс эмес бүтүн сандарынын көбөйтүндүсү деп A жана B көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүнүн элементтеринин саны c аталат. б.а.

$$n(A)\cdot n(B)=n(AxB)$$

Эки аныктоонун тең күчтүү экендигине төмөнкү мисал аркылуу ишенүүгө болот:

A={3,4,5} жана B= {m,k,t,u} көптүктөрү берилсин.

Анда n(A)=3, n(B)=4 жана

AxB= {(3;m), (3;k), (3;t), (3;u),

(4;m), (4;k), (4;t), (4;u),

(5;m), (5;k), (5;t), (5;u),} б.а. n(AxB)=12

Демек, n(A)·n(B)=n(AxB) же 3·4=12.

Ал эми биринчи аныктоо боюнча 3·4=3+3+3+3=12 келип чыгат.

Ошентип, көбөйтүндүнүн эки аныктоосу тең күчтүү экен.

Эки сандын көбөйтүндүсүнүн аныктоосунан пайдаланып 3, 4, 5, ж.б. сандардын көбөйтүндүлөрүн да аныктоого болот.

Аныктоолор:

1) a_1, a_2 жана a_3 сандарынын көбөйтүндүсү деп $(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$ саны аталат. б.а. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$
2) a_1, a_2, a_3 жана a_4 сандарынын көбөйтүндүсү деп $((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4$ саны аталат. б.а. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4$
3) a_1, a_2, a_3, a_4 жана a_5 сандарынын көбөйтүндүсү деп $(((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4) \cdot a_5$ саны аталат. ба. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = =(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4) \cdot a_5$ ж.б.

(Тамгалуу туюнтмаларда көбөйтүү белгиси «чекитти» таштап жазса да болот).

Теорема: a жана n терс эмес бүтүн сандардын көбөйтүндүсү a·n дайыма жашайт жана бирөө гана.

Далилдөө: Көбөйтүндүнүн биринчи аныктоосуна таянат. Ал үчүн үч учурду тең кароо керек:

1) n>1 болсо, анда $a \cdot n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ жолу}}$ болот.

   Пайда болгон сумма дайыма табылышы жана бир маанилүү экендиги белгилүү.
2) n=1 болсо, анда аныктоо боюнча a·1=a.

   a санынын бар жана жалгыз экендиги анык.
3) n=0 болсо, анда a·0=0 экендиги чыгат, ал эми 0 саны дайыма бар жана жашайт.

Бул теоремадан төмөнкү касиеттер келип чыгат:

1°Эгер a=b болсо, анда ac=bc чындыгында. a=b болгондуктан a жана b сандары бир эле сан болушат. Жогорку, теорема боюнча ac жана bc көбөйтүндүлөрү да бирдей болушат. б.а. ac=bc.

2°Эгер a=b жана c=d болсо, анда ac=bd болот. Бул сүйлөмдүн чын экендигине жогоркудай эле ишенүүгө болот.

14. Көбөйтүү амалынын касиеттери.

1°. Орун алмаштыруу касиети (көбөйтүндүнүн коммутативдүүлүгү).

Теорема: Ар кандай a жана b сандары үчүн a·b=b·a.

б.а. көбөйтүлүүчүлөрдүн ордун алмаштыруудан көбөйтүндү өзгөрбөйт.

Далилдөө: Аныктоого ылайык үч учурду карайбыз.

1) $b>1$ болсун. Анда a санынын составдык бөлүгүнө жана көбөйтүндүнүн аныктоосунун биринчи шартына ылайык

$$a\cdot b=(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a\ \text{жолу}})\cdot b=$$

$$=\left.\begin{array}{r} 1+1+\ldots+1+ \\ +1+1+\ldots+1+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{+1+1+\ldots+1}_{\text{а жолу}} \end{array}\right\} b \text{ жолу}$$

Пайда болгон «таблицадагы» бирлердин санын эки түрдүү жол менен (бир жолчодогу бирлердин санын (a) алардын санына (b) · көбөйтүү; бир мамычадагы бирлердин санын (b) мамычылардын санына (a) көбөйтүү эсептесек, $a\cdot b=b\cdot a$ экендиги келип чыгат.

Эгер $a=1$, $b>1$ болсо, анда $b\cdot 1=b$ жана $1\cdot b=1+1+\ldots+1=b$ экендиги келип чыгат. Демек, бул учурда да $1\cdot b=b\cdot 1$. Ошондой эле $a=0$ болгондо да берилген касиет туура экендигин далилдөөгө болот. б.а. $0\cdot b=b\cdot 0$

2) $b=1$ болсун

а) Эгер $a=0$ болсо, анда көбөйтүндүнүн аныктоосу боюнча $0\cdot 1=0$ жана $1\cdot 0=0$. Буларды салыштырып $0\cdot 1=1\cdot 0$ экендигин алабыз.

б) Эгер $a=1$ болсо, анда $1\cdot 1=1$ экендиги ачык көрүнүп турат.

в) Эгер $a>1$ болсо, анда көбөйтүндүнүн аныктоосу боюнча $a\cdot 1=a$ жана $1\cdot a=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{а жолу}}=a$ болгондуктан $a\cdot 1=1\cdot a$ болушу келип чыгат.

3) $b=0$ болгон учур үчүн да берилген касиеттин туура экендигин жогорку сыяктуу эле далилдөөгө болот.

Бул касиетти AxB жана BxA декарттык көбөйтүндүлөрдүн тең кубаттуу экендигин пайдаланып да далилдөөгө болот. Б.а.

$$a\cdot b=n(AxB)=n(BxA)=b\cdot a$$

Экиден ашык сандардын көбөйтүндүсү да коммутативдүү. Мисалы: $5\cdot 7\cdot 8=8\cdot 5\cdot 7=7\cdot 5\cdot 8=5\cdot 8\cdot 7$

2^o. Топтоштуруу касиети (көбөйтүндүнүн **ассоциативдүүлүгү**).

Теорема: Ар кандай a, b жана c сандары үчүн

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Далилдөө үчүн көбөйтүндүнүн аныктоосунан пайдаланабыз. б.а.

$$(a\cdot b)\cdot c=(\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\ \text{жолу}})\cdot c=$$

$$=\left.\begin{array}{l} a+a+\ldots+a+\\ +a+a+\ldots+a+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \underbrace{+a+a+\ldots+a}_{b\ \text{жолу}}\end{array}\right\}\text{c жолу}$$

Акыркы суммадагы а лардан санын эки түрдүү жол менен эсептөө менен $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$ экендигин келтирип чыгарабыз.

Далилдөөнү көптүктөр теориясын пайдаланып да жүргүзүүгө болот. Ал үчүн A, B жана C көптүктөрүнүн (AxB)xC жана Ax(BxC) декарттык көбөйтүндүлөрү тең кубаттуу экендигин пайдаланабыз. (Себеби, акыркы эки көптүктүн элементтеринин ортосунда өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк бар).

Ошол себептүү,

n((AxB)xC)=n(Ax(BxC)) болот.

Демек, $(ab)c=a(bc)$.

Далилденген теореманы төмөнкүдөй эреже түрүндө практикада пайдаланышат:

> Эки сандын көбөйтүндүсүн үчүнчү бир санга көбөйтүү үчүн биринчи санды экинчи жана үчүнчү сандардын көбөйтүндүсүнө көбөйтүү жетиштүү.

Бул касиет экиден ашык сндардын көбөйтүндүсү үчүн да туура болушун далилдөөгө болот.

Аталган касиетти, акыркы сүйлөмдөрдү пайдаланып, төмөнкүчө айтууга да болот:

> Бир нече сандарды көбөйтүүдө жанаша турган көбөйтүүчүлөрдү алардын көбөйтүндүсү менен алмаштырууга болот. б.а.

$a_1a_2\ldots a_{m-1}a_m\ldots a_n=(a_1a_2\ldots a_{m-1})\cdot(a_m\ldots a_n)$, мында $1<m\leq n$. Мисалы:

$25\cdot65\cdot2\cdot4\cdot5=25\cdot4\cdot65\cdot2\cdot5=(25\cdot4)\cdot65\cdot(2\cdot5)=65000$.

«Барабар» катнаштыгынын симметриялуу болгондугу үчүн акыркы барабардыктан $(a_1a_2\ldots a_{m-1})\cdot(a_m\ldots a_n)=$
$=a_1a_2\ldots a_{m-1}a_m\ldots a_n$ экендиги келип чыгат. Мындан:

> Бир нече сандардын көбөйтүндүсүн экинчи бир көбөйтүндүгө көбөйтүү үчүн алардын бардык көбөйтүлүүчүлөрүн удаалаш көбөйтүү жетиштүү.

<u>Мисалы</u>: $(25\cdot4\cdot2)\cdot(3\cdot50)=25\cdot4\cdot2\cdot3\cdot50$

Көбөйтүү амалынын орун алмаштыруу жана топтоштуруу касиеттери жогорку сыяктуу практикалык эсептөөлөрдү тез жана ыңгайлуу жолдор менен аткарууда колдонулат.

3°. Көбөйтүндүнүн **монотондуулугу**.

Теорема 1: Эгер a, b, n натуралдык сандары берилип, $a>b$ болсо, анда $an>bn$ болот.

Далилдөө:

а) $n>1$ болсун. Анда an жана bn көбөйтүндүлөрүн кошулуучуларынын саны n болгон суммалар түрүндө жазууга болот. б.а.

$$an=a+a+\ldots+a$$
$$bn=b+b+\ldots+b$$

Мында $a>b$ болгондуктан сумманын монотондуулугунан $a+a+\ldots+a>b+b+\ldots+b$ келип чыгат.

Анда, көбөйтүндүнүн аныктоосу боюнча $an>bn$

б) $n=1$ болсун. Анда $a>b$ болгондуктан $a\cdot1>b\cdot1$ болот.

Теорема-1ª: Эгер a, b терс эмес бүтүн сандары берилсе каалаган n натуралдык саны үчүн $a>b$ болгондо $a\cdot n>b\cdot n$ болот.

Теорема-2: a, b, c, d терс эмес бүтүн сандары үчүн $a>b$ жана $c>d$ болсо, анда $ac>bd$ болот.

Акыркы эки теореманын далилдөөлөрү биринчи теореманыкы сыяктуу эле жүргүзүлөт.

Жогорку айтылыштардын негизинде терс эмес бүтүн сандардын төмөнкү эки касиети келип чыгат:

1) **Архимеддин аксиомасы:** Ар кандай терс эмес бүтүн a жана b саны үчүн $b\cdot n>a$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай n натуралдык саны табылат. Мисалы: Эгер $a=1000000$, $b=2$ болсо, анда $n=500001$ болот, себеби $2\cdot500001>1000000$
2) Көбөйтүлүүчүлөрдүн жок дегенде бири нөль болгондо гана терс эмес бүтүн сандардын көбөйтүндүсү нөлгө барабар.

4°. Кыскаруучулук касиети.

Теорема: Ар кандай a, b жана c натуралдык сандары үчүн $ab=ac$ болсо, анда $b=c$ болот.

Чындыгында, эгер $b>c$ ($b<c$) болсо, анда монотондуулуктун 1-теоремасы боюнча $ab>ac$ ($ab<ac$) болот. Бул теореманын шартына карама-каршы келет. Демек, бир гана $b=c$ учурдун болушу керек.

Мисалы: а) $275\cdot47=47\cdot275$ болсо, анда $275=275$ же $47=47$ болот

б) $17x=51$ болсо, анда $x=3$ болот.

5°. Бөлүштүрүүчүлүк касиети (көбөйтүндүнүн **дистрибутивдүүлүгү**).

Теорема–1: (Көбөйтүүнүн суммага карата болгон бөлүштүрүүчүлүк касиети): Ар кандай a, b жана c сандары үчүн

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ болот.

Далилдөө:

1) $c>1$ болсун, анда бизге белгилүү болгон аныктоо жана касиеттердин негизинде

$$(a+b)\cdot c=\underbrace{(a+в)+(a+b)+\ldots+(a+b)}_{c\ жолу}=$$

$$=a+b+a+b+\ldots+a+b=$$

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{c\ жолу}+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{c\ жолу}=a\cdot c+b\cdot c$$

2) $c=1$ болсун, анда $(a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$

3) $c=0$ болсун, анда $(a+b)\cdot 0=0=0+0=a\cdot 0+b\cdot 0$

Бул теоремадан: сумманы санга көбөйтүү үчүн

> ар бир кошулуучуну ошол санга көбөйтүп, натыйжаларын кошуп коюу керек– деген маанилүү эреже келип чыгат.

Анын практикалык колдонулушу:

$$24\cdot 3=(20+4)\cdot 3=20\cdot 3+4\cdot 3=60+12=72$$

$$243\cdot 2=(200+40+3)\cdot 2=400+80+6=486$$

Демек, берилген касиет кошулуучулардын саны экиден ашык болгондо да туура болору анык.

Көбөйтүүнүн орун алмаштыруу касиетине таянып, $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$ формуласын алабыз. Мындан: санды суммага көбөйтүү үчүн,

> ал санды, ар бир кошулуучуга көбөйтүп, натыйжаларын кошуп коюу керек деген эреже келип чыгат.

Бул эреже сандарды эки, үч, ж.б. орундуу сандарга көбөйтүү үчүн негиз болот. Мисалы,

$$25\cdot 42=25\cdot(40+2)=25\cdot 40+25\cdot 2=1050$$

$$905\cdot 1001=905\cdot(1000+1)=905000+905=905905$$

Теорема–2: (Көбөйтүүнүн айырмага карата болгон бөлүштүрүүчүлүк касиети): $a\geq b$ болгон ар кандай a, b жана c терс эмес бүтүн сандары үчүн $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ болот.

Далилдөөнү көптүктөр теориясынын негизинде жүргүзөбүз. Айталы A,B,C көптүктөрү берилип $B\subset A$ болсун жана $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ деп алалы.. Анда көбөйтүндүнүн көптүктөр теориясынын негизинде берилген аныктоосунун негизинде

$(a-b)\cdot c=n((A\setminus B)xC)$ болот. Ошондой эле

$(A\setminus B)xC=(AxC)\setminus(BxC)$ болгондуктан

$n((A\setminus B)xC)=n((AxC)\setminus(BxC))=n(AxC)-n(BxC)=a\cdot c-b\cdot c$ экендигин алабыз. Бул теоремадан: айырманы санга

> көбөйтүү үчүн кемүүчүнү жана кемитүүчүнү, ошол санга көбөйтүп, биринчи көбөйтүндүдөн экинчисин кемитип коюу жетиштүү- деген эреже келип чыгат.

Ошондой эле орун алмаштыруу касиетинин негизинде

$$c\cdot(a-b)=c\cdot a-c\cdot b,\ (a\geq b)$$

> формуласын, же санды айырмага көбөйтүү үчүн ал санды кемүүчүгө жана кемитүүчүгө көбөйтүп, биринчи көбөйтүндүдөн экинчисин кемитип коюу жетиштүү деген эрежени алабыз.

Бул эрежелер да айрым практикалык эсептөөлөрдө, туюнтмаларды теңдеш өзгөртүп түзүүдө колдонулушат. Мисалы:

$4\cdot 999=4\cdot(1000-1)=4000-4=3996$

$99\cdot 35=(100-1)\cdot 35=3500-35=3465$

$5378\cdot 628-4378\cdot 628=(5378-4378)\cdot 628=628000$

15. Көбөйтүү амалынын практикалык колдонулушу.

Көбөйтүү амалы практикада эки гана учурда (турмуштук жагдайда) колдонулат:

1) Барабар кошулуучулардын суммасын табууда.

   Мисалы: Эгер бир катарда 45 түп терек көчөтү болсо, анда ошондой эле 32 катарда канча терек көчөтү бар?

   $45\cdot 32=1440$ (түп)

2) Берилген санды бир нече эсе чоңойтууда.

   Мисалы: Эльнура 5 жашта, ал эми чоң атасы андан 12 эсе улуу. Чоң атасы канча жашта?

   $5\cdot 12=60$ (жаш)

16. Көбөйтүү эрежелери.

1) Көбөйтүүнүн өзгөчө учурлары:

   а) Сандарды нөлгө көбөйтүү: көбөйтүү амалынын аныктоосу боюнча ар кандай а саны үчүн **$a\cdot 0=0$** болот. Мисалы: $7\cdot 0=0$, $462\cdot 0=0$, $0\cdot 0=0$

   б) Нөлдү санга көбөйтүү: нөлдү ар кандай санга көбөйтүүдө нөль келип чыгат. б.а. ар кандай а саны үчүн $(a>1)$, $0\cdot a=0$ болот. Себеби, $0\cdot a=\underbrace{0+0+\ldots+0}_{а\ жолу}=0$

   в) Бирди көбөйтүү: Ар кандай $a>1$ саны үчүн **$1\cdot a=a$**.

Себеби, $1\cdot a=\underbrace{1+1+...+1}_{\text{а жолу}}=a$

г) Бирге көбөйтүү: көбөйтүндүнүн аныктоосу боюнча ар кандай а саны үчүн а·1=а болот. Демек, 1·1=1.

2. Таблицалык көбөйтүү– бир орундуу сандарды бир орундуу сандарга көбөйтүү учурлары. Мындагы 0 жана 1 учурлары жогоруда каралды. Бирден чоң болгон бир орундуу сандарды көбөйтүү, көбөйтүү амалынын аныктоосунун көбөйтүүчүнүн бирден чоң учурларына таянып, кошуу амалы аркылуу аткарылат. Натыйжалары эске тутулат. Мисалы:

   4·3=4+4+4=12
   7·5=7+7+7+7+7=35
   2·9=9·2=18, ж.б.

   Көбөйтүү таблицасы (Пифагордун таблицасы)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

3. Таблицасыз көбөйтүү.

   а) сандарды бир жана аягы нөлдөр болгон сандарга (10, 100, 1000, ...) көбөйтүү: эң мурда бирди ошол сандарга көбөйтүү ыкмасын карайбыз. Бул учур көбөйтүүнүн аныктоосуна жана орун алмаштыруу касиетинин негизинде аткарылат. Б.а.

   1·10=10·1=10
   1·100=100·1=100
   . 1·1000=1000·1=1000, ...

   Сандарды 10, 100, 1000, ... сандарына көбөйтүү жогорку учурга таянып, сумманы санга көбөйтүү жана номерлөөгө негизделет. б.а.

   $625\cdot 10=(\underbrace{1+1+...+1}_{\text{625 жолу}})\cdot 10=\underbrace{10+10+...+10}_{\text{625 жолу}}=$

   =625 онд.=6250

   $625\cdot 100=(\underbrace{1+1+...+1}_{\text{625 жолу}})\cdot 100=\underbrace{100+100+...+100}_{\text{625 жолу}}=$

=625 жүзд.=62500

Демек, санды бир жана аягы нөлдөр болгон сандарга көбөйтүү үчүн ошол сандын артына көбөйтүүчүдө канча нөль болсо ошончо нөлдү жазып коюу керек. Мисалы:

47·10000=470000

9·1000000=9000000, ж.б.

б) Тегерек сандарды көбөйтүү. Бул учур көбөйтүндүнү көбөйтүндүгө көбөйтүү эрежесинин жана көбөйтүү амалынын орун алмаштыруу, топтоштуруу касиеттеринин негизинде аткарылат. б.а.

4 000 000·5000=(4· 1 000 000)·(5·1000)=

=4· 1000 000·5·1000=(4·5)·(1000 000·1000)=

=20·1000 000 000=20 000 000 000

в) Көп орундуу сандарды бир орундуу сандарга көбөйтүү– сумманы санга көбөйтүү эрежесине, сумманын коммутативдүүлүгүнө жана таблицалык көбөйтүүгө негизделип, жазуу жүзүндө (мамыча түрүндө) аткарылат. б.а. түшүндүрүү менен оозеки аткаруу:

625·3=(600+20+5)·3=(5+20+600)·3=

=5·3+30·3+600·3=15+60+1800=1875

Жогоркунун негизинде мамыча түрүндө жазып, төмөнкүчө аткарылат:

$$\begin{array}{r} 625 \\ \underline{\times \quad 3} \\ 1875 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 23759 \\ \underline{\times \quad 5} \\ 118840 \end{array}$$

г) Көп орундуу сандарды көп орундуу сандарга көбөйтүү алдыңкы учур сыяктуу эле сумманы санга көбөйтүүнүн негизинде эле мамыча түрүндө аткарылат. б.а.

837·624=837·(600+20+4)=837·(4+20+600)=

=837·4+837·20+837·600=

=3348+16740+502200=522288

Бул көбөйтүүнүн мамыча түрүндө аткарылышы жана жазылышы төмөнкүчө:

$$\begin{array}{r} 837 \\ \underline{\times\ 624} \\ 3348 \\ +1674 \\ 5022 \\ \hline 522288 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 837 \\ \underline{\times \ 624} \\ 1674 \\ +\ 3348 \\ 5022 \\ \hline 522288 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 837 \\ \underline{\times \ 624} \\ 5022 \\ +\ 1674 \\ 3348 \\ \hline 522288 \end{array}$$

Демек, $x=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ жана $y=b_kb_{k-1}\ldots b_1b_0$ сандарын көбөйтүү алгоритмасы төмөнкүчө болот:

1. x санынын астына тиешелүү разряддык бирдиктери келгендей кылып y санын жазабыз.
2. x санын y тин эң кичине разрядык бирдиги b_0 гө көбөйтүп (бирдигинен баштап), xb_0 көбөйтүндүсүн тиешелүү разряддык бирдиктер дал келгендей жазабыз.
3. x санын y тин кийинки разряддык бирдиги b_1 көбөйтүп, xb_1 көбөйтүндүсүн мурдагыдай эле тиешелүү разрядды туш-тушуна жазуу керек.
4. Бул процесс x санын y тин эң чоң разряддык бирдиги b_kны көбөйтүп бүткөнгө чейин улантылат.
5. Пайда болгон толук эмес көбөйтүндүлөрдү кошуп, изделүүчү көбөйтүндүнү табабыз.

17. Бөлүү амалы. Тийиндинин жашашы жана жалгыздыгы.

Практикада бизге белгилүү болгон кошуу, кемитүү жана көбөйтүү амалдары менен чыгарууга мүмкүн болбогон турмуштук жагдайлар (маселелер) да кездешет. Мисалы: «15 дептерди 30 сомго сатып алса, анда бир дептер канча турат?» Мында 30 сомду 15 барабар бөлүктөргө (бирдей кошулуучуларга) ажыратууга туура келет. Же «30 сомго 2 сомдон канча дептер сатып алууга болот?» деген маселеде 30 сомду 2 сомдон бир нече бөлүккө бөлүү керек болот. Бул эки маселеде тең көбөйтүндү жана көбөйтүүчүлөрдүн бири аркылуу экинчи көбөйтүндүнү табууга туура келет. Ошондуктан жогорку турмуштук жагдайларга жооп берүү үчүн көбөйтүү амалына тескери болгон төртүнчү арифметикалык амалды киргизүү зарылчылыгы пайда болот.

Аныктоо: Көбөйтүндү жана көбөйтүүчүлөрдүн бири аркылуу экинчи көбөйтүүчүнү табуу амалы **бөлүү** амалы деп аталат.

Аныктоо: a терс эмес бүтүн санын b натуралдык санына бөлүүдөн келип чыккан тийиндиси деп b га көбөйткөндө a саны келип чыга турган c саны аталат жана $a:b=c$ түрүндө жазылат.

Демек, $b\cdot c=a$ болгондо гана $a:b=c$ болот. Мисалы, $30:2=15$, себеби $15\cdot 2=30$.

Ошондой эле, сандардын тийиндисин табуу амалы бөлүү амалы боло тургандыгы көрүнүп турат. Мында

a– бөлүнүүчү,

b– бөлүүчү,

c же $a:b$– тийинди болушат.

Теорема: (тийиндинин жашашы жөнүндө): a жана b натуралдык сандарынын тийиндиси жашашы үчүн $a \geq b$ болушу зарыл.

Далилдөө: a жана b сандарынын тийиндиси бар болсун, б.а. $a=b\cdot c$ барабардыгы аткарыла тургандай c саны табылсын. Ар кандай c натуралдык саны үчүн $c \geq 1$ экендиги анык. Эки жагын тең b га көбөйтүү менен $b\cdot c \geq b$ болорун алабыз. $b\cdot c=a$ болгондуктан $a \geq b$ экендиги келип чыгат.

Теорема: (тийиндинин жалгыздыгы жөнүндө): Эгер a жана b натуралдык сандарынын тийиндиси бар болсо, анда ал бирөө гана.

Далилдөө: Айталы a жана b натуралдык сандарынын тийиндиси экөө болсун, б.а. $a:b=c_1$, $a:b=c_2$ жана $c_1 \neq c_2$ болсун. Анда тийиндинин аныктоосу боюнча $b\cdot c_1=b\cdot c_2$ же $c_1=c_2$ экендиги келип чыгат. Бул карама-каршылык эки тийинди бар деген айтылышты жокко чыгарат. Демек, тийинди бирөө гана.

Тийиндинин аныктоосун пайдаланып оозеки эсептөөлөрдө колдонулуучу ыкма жөнүндө төмөнкү теореманы далилдөөгө болот:

Теорема: Ар кандай c жана $b \neq 0$ сандары үчүн

$(c\cdot b):b=c$ болот.

Далилдөө: Айталы $c\cdot b=a$ болсун, анда тийиндинин аныктоосу боюнча $a:b=c$ болот. Анда a нын ордуна $c\cdot b$ көбөйтүндүсүн коюп $(c\cdot b):b=c$ экендигин алабыз.

Бул теорема көбөйтүлүүчүлөрдүн саны экиден ашык болгон учурда да туура болот, б.а. $(a_1\cdot a_2\ldots a_k\cdot b):b=a_1\cdot a_2\ldots a_k$

Мисалы: $(7\cdot 5\cdot 9\cdot 2\cdot 1999):1999=7\cdot 5\cdot 9\cdot 2=630$

18. Көбөйтүү жана бөлүү амалдарынын натыйжалары менен алардын компоненттеринин арасындагы байланыштар.

1) $m\cdot n=t$. Анда тийиндинин аныктоосу боюнча $m=t:n$ жана $n=t:m$ болот. Демек,

> Көбөйтүлүүчү көбөйтүндүнү экинчи көбөйтүлүүчүгө бөлгөнгө барабар.

2) $a:b=q$ болсун. Анда

а) тийиндинин аныктоосу боюнча $a=b\cdot q$

> Демек, бөлүнүүчү бөлүүчү менен тийиндинин көбөйтүндүсүнө барабар.

б) $b\cdot q=a$ барабардыгынан $b=a:q$ келип чыгат.

Демек, белгисиз бөлүүчү бөлүнүүчүнү тийиндиге бөлгөнгө барабар.

Бул көз карандылыктардын жардамы менен, айрым теңдемелерди алгебралык жолдорду пайдаланбастан чыгарууга болот. Мисалы: $(2x-48):5+27=39$

x кошулуучуда

$$(2x-48):5=39-27$$

$$(2x-48):5=12$$

x бөлүнүүчүдө:

$$2x-48=12\cdot 5$$

$$2x-48=60$$

x кемүүчүдө:

$$2x=60+48$$

$$2x=108$$

x экинчи көбөйтүлүүчү (көбөйтүүчү)

$$x=108:2$$

$$x=54.$$

19. Бөлүүнүн өзгөчө учурлары.

1) Ар кандай $a\neq 0$ саны үчүн $0:a=0$ болот. Себеби, тийиндинин аныктоосу боюнча $0\cdot a=0$ болот. Демек, нөлдү ар кандай $a\neq 0$ санына бөлсө, тийинди 0 болот.
2) Ар кандай a саны үчүн $a:1=a$ болот. Себеби, тийиндинин аныктоосу боюнча $a\cdot 1=a$. Мында $1:1=1$ учуру да камтылат.
3) Эгер $a\neq 0$ болсо, анда $a:0$ тийиндиси жашабайт, б.а. ар кандай нөлдөн айырмаланган санды нөлгө бөлүүгө мүмкүн эмес.

   Чындыгында, эгер алардын тийиндиси с деген сан бар болсо, анда тийиндинин аныктоосу боюнча $a=c\cdot 0$ же $a=0$ болот, бул $a\neq 0$ деген шартка карама-каршы келет.
4) $0:0$ туюнтмасынын мааниси чексиз. б.а. $0:0=c$ болсо, анда $0=c\cdot 0$ барабардыгы ар кандай с саны үчүн туура болот. Ошол себептүү математикада $0:0$ туюнтмасын биринчи түрдөгү аныксыздык деп атап, нөлдү нөлгө бөлүүгө болбойт деп коюшат.

20. Бөлүү амалынын практикалык колдонулушу.

Аткарган кызматы боюнча бөлүү амалы практикада төмөнкү үч учурда колдонулат:

1) Көбөйтүндү жана көбөйтүлүүчүлөрдүн бири аркылуу экинчисин табууда. Мисалы:

а) **Мазмуну боюнча бөлүү:** «60 кг алманы 30 кг дан канча капка жайгаштырууга болот?»

60кг : 30кг=2 (кап)

б) **Бөлүктөргө бөлүү:** «60 кг алманы тепе-тең кылып эки капка бөлүп салышты. Ар бир капта канчадан алма бар?»

60 кг : 2= 30 кг

1) Санды бир нече эсе азайтууда; Мисалы: «Атасы 40 жашта, ал эми баласы ага караганда эки эсе кичүү. Баласы канча жашта?»

2) Сандарды эселүү салыштырууда; Мисалы: «Атасы 40 жашта, ал эми баласы 20 жашта. Атасы баласынан канча эсе улуу? Баласы атасынан канча эсе кичүү?»

21. Бөлүүнүн суммага жана айырмага карата болгон дистрибутивдүүлүгү.

Теорема-1: Эгер a:n жана b:n тийиндилери бар болсо, анда (a+b):n=a:n+b:n болот. б.а. сумманы санга бөлүү үчүн ал санга ар бир кошулуучуну бөлүп, пайда болгон тийиндилерди кошуп коюу керек.

Далилдөө: a:n жана b:n тийиндилери шарт боюнча жашагандыктан $a:n=q_1$, жана $b:n=q_2$ барабардыктары аткарыла тургандай q_1 жана q_2 терс эмес бүтүн сандары табылат. Анда $a=nq_1$ жана $b=nq_2$ болот. Сумманы тапсак $a+b=nq_1+nq_2=n(q_1+q_2)$ келип чыгат. Демек, изделүүчү тийинди $(a+b):n=n(q_1+q_2):n=q_1+q_2=a:n+b:n$ экендиги келип чыгат.

Бул теорема кошулуучулардан саны экиден ашык болгондо да туура болуп, практикада айрым эсептөө ыкмаларына теориялык негиз болот. Мисалы:

48:2=(40+8):2=40:2+8:2=24

60:5=(50+10):5=50:5+10:5=12

2121:7=(2100+21):7=2100:7+21:7=303

6930:3=(6000+900+30):3=2310

Теорема−2: Эгер a:n жана b:n тийиндилери бар болсо жана a-b айырмасы жашаса, анда **(a-b):n=a:n-b:n** болот. б.а. айырманы санга бөлүү үчүн кемүүчүнү жана кемитүүчүнү ошол санга бөлүп, биринчи тийиндиден экинчи тийиндини кемитип коюу керек.

Бул теорема да жогорудай эле далилденет жана айрым эсептөөлөрдү аткарууда колдонулат. Мисалы:

(370-37):37=370:37-37:37=10-1=9

153:17=(170-17):17=170:17-17:17=10-1=9

22. Көбөйтүндүнү санга бөлүү. Санды тийиндиге жана тийиндини санга көбөйтүү.

Теорема–1: Көбөйтүндүнү санга бөлүү үчүн ал санга көбөйтүлүүчүлөрдүн бирин бөлүү жетиштүү. Б.а.

$$(a_1a_2...a_k):n=(a_1:n):a_2...a_k=...=a_1a_2...(a_k:n)$$

Далилдөө: Айталы $a_1:n$ тийиндиси бар болсун. б.а. $a_1:n=q_1$ болсун. Анда $a_1=nq_1$ болот. Ордуна койсок $a_1a_2...a_k=(nq_1)\cdot a_2...a_k$ келип чыгат. Анда

$(a_1a_2...a_k):n=((nq_1)a_2...a_k):n==(n\cdot q_1\cdot a_2...a_k):n=q_1a_2...a_k=$ $(a_1:n)a_2...a_k$.

Бул теоремадан $(a_1\cdot a_2):n=a_1\cdot(a_2:n)$ болгондуктан, . «барабар» катнаштыгынын симметриялуулугун пайдаланып $\mathbf{a_1\cdot(a_2:n)=(a_1\cdot a_2):n}$ формуласын алабыз.

> Демек, санды тийиндиге көбөйтүү үчүн ал санды бөлүнүүчүгө көбөйтүп, пайда болгон көбөйтүндүнү бөлүүчүгө бөлүп коюу керек.

Же, акыркы формуладан көбөйтүүчүлөрдү орун алмаштырып, тийиндини санга көбөйтүү эрежеси келип чыгат:

$$\mathbf{(a_2:n)\cdot a_1=(a_1\cdot a_2):n}$$

Бул эрежелер да практикалык эсептөөлөрдө колдонулат. Мисалы:

$(4\cdot5\cdot6\cdot14):7=4\cdot5\cdot6\cdot(14:7)=120\cdot2=240$

$280\cdot(140:28)=(280\cdot140):28=10\cdot140=1400$

$(100:25)\cdot4=(100\cdot4):25=400:25=16$

23. Санды көбөйтүндүгө жана тийиндини санга бөлүү.

Теорема: Эгер тийиндилер жашаса, анда $a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$ б.а. санды көбөйтүндүгө бөлүү үчүн ал санды көбөйтүлүүчүлөрдүн ар бирине удаалаш бөлүп коюу керек.

Далилдөө: $a:(b\cdot c)=k$ деп белгилейбиз. Анда $a=k\cdot(b\cdot c)=(k\cdot c)\cdot b$ болот. $a=(k\cdot c)\cdot b$ барабардыгынан $a:b=k\cdot c$ => $k=(a:b):c$ болот. k санына карата транзитивдүүлүктү пайдаланып $a:(b\cdot c)=(a:b):c$ барабардыгын алабыз.

Экинчи формуланы да ушундай эле далилдөөгө болот. Мисалы:

$220:(44\cdot5)=(220:5):44=44:44=1$

$96:6=96:(3\cdot2)=(96:3):2=32:2=16$

Бул формулалардан «барабар» катнаштыгынын симметриялуу экендигин пайдаланып $(a:b):c=a:(b\cdot c)$ формуласын келтирип чыгарабыз. Б.а.

Тийиндини санга бөлүү үчүн бөлүнүүчүнү бөлүүчү менен ошол сандын көбөйтүндүсүнө бөлүп коюу керек.

Мисалы:

$(121000:11):11000=121000:(11\cdot 11000)=121000:121000=1$

24. Санды тийиндиге бөлүү.

Теорема: Эгер тийиндилер жашаса, анда $a:(b:c)=(a\cdot c):b$ болот. б.а. санды тийиндиге бөлүү үчүн ал санды бөлүүчүгө көбөйтүп, чыккан көбөйтүндүнү бөлүнүүчүгө бөлүп коюу керек.

Далилдөө: $a:(b:c)=k$ деп белгилөө киргизебиз. Анда $a=k\cdot(b:c)=(k\cdot b):c$ болот. $a=(k\cdot b):c$ барабардыгынан $k\cdot b=a\cdot c$ же $k=(a\cdot c):b$ келип чыгат. Транзитивдүүлүк касиети боюнча $a:(b:c)=(a\cdot c):b$ болот. Ушул сыяктуу эле

$a:(b:c)=(a:b)\cdot c$ экендигин да далилдөөгө болот.

Берилген эрежелер да практикалык эсептөөлөрдө көп колдонулат. Мисалы:

$380:(38:19)=(380:38)\cdot 19=10\cdot 19=190$

$250:(20:4)=(250\cdot 4):20=1000:20=50$

25. Калдыгы менен бөлүү.

Аныктоо: Терс эмес бүтүн a санын b натуралдык санына калдыгы менен бөлүү деп $a=bq+r$ барабардыгы аткарыла турган q жана r терс эмес бүтүн сандарын табуу аталат, мында $0\le r<b$. a– бөлүнүүчү, b– бөлүүчү, q– толук эмес тийинди, r– калдык. Жазылышы: $a:b=q$ (калдык r).

Мисалы, 30 санын 7 санына калдыктуу бөлүү үчүн $30=7\cdot 4+2$ барабардыгы туура боло турган 4 жана 2 сандарын табуу керек. Мында $30:7=4$ (калдык 2).

Теорема: Ар кандай терс эмес a бүтүн жана b натуралдык саны үчүн $a=b\cdot q+r$ барабардыгы аткарыла тургандай q жана r терс эмес бүтүн сандары ($0\le r<b$) дайыма табылат жана бир маанилүү.

Далилдөө: Айталы $a\ge b$ болсун жана a саны b га калдыксыз бөлүнбөсүн.

Эң мурда $bq<a<b\ (q+1)$ барабардыгы аткарыла тургандай q саны табыларын далилдейбиз. Чындыгында, $1\le b$ болгондуктан $a=a\cdot 1\le ab=ba$ болот. Мындан: $a<bk$ барабарсыздыгы туура боло турган натуралдык сандардын К көптүгү бош эмес көптүк (мисалы, ал көптүккө a саны тиешелүү). Анда К көптүгүнүн эң кичине саны бар болот, ал сан m болсун. Шарт боюнча $a\ge b$ болгондуктан $m\ne 1$ болот. Эгер $m=1$ болсо, анда $a<b\cdot 1=b$ болуп калат– бул $b\le a$ барабарсыздыгына каршы келет.

Демек $m \neq 1$ болгондуктан анын алдында турган $m=q+1$ болгон q саны бар болот. Бирок, $a<bm$, ал эми $q<m$ боло тургандай m эң кичине сан болгондуктан $bq<a$ болот. Анда $bq<a<bm$, б.а. $bq<a<b(q+1)$.

Эми $r=a\text{-}bq$ деп белгилеп, $a=bq+r$ экендигин алабыз. Мында $r=a-bq<b(q+1)-bq=b$. Демек, a санын $a=bq+r$, $r<b$ түрүндө жазууга болот экен.

Калдыктуу бөлүүнүн бир маанилүү экендигин далилдөө үчүн, тескерисинче $a=bq_1+r_1$ жана $a=bq_2+r_2$, $r_1<b$, $r_2<b$ жана $q_1 \neq q_2, r_1 \neq r_2$ болсун деп алалы. Айталы $r_1<r_2$ болсун, анда $bq_1+r_1=bq_2+r_2$ барабардыгынан $bq_2< bq_1$ келип чыгат. Мындан $bq_1-bq_2=r_2-r_1$. Бирок, $r_2<b$ болгон себептүү $r_2-r_1<b$.

Экинчиден, $r_2-r_1=b(q_1-q_2)$ болгондуктан $b \leq r_2-r_1$ болот.

Ал эми пайда болгон $r_2-r_1<b$ жана $r_2-r_1 \geq b$ барабарсыздыктары бири-бирине карама-каршы болгондуктан $r_1<r_2$ болсун дегенибиз туура эмес. Ошондой эле $r_1>r_2$ болбосуна ушинтип эле ишенүүгө болот. Демек, $r_2=r_1$ болот.

$a=bq_1+r_1$ жана $a=bq_2+r_2$ барабардыктарынан $bq_1+r_1=bq_2+r_2$ же $bq_1=bq_2$ же $q_1=q_2$ экендиги келип чыгат.

Ошентип, калдыгы менен бөлүү бир маанилүү болушу далилденди.

26. Бөлүү эрежелери.

Натуралдык сандарды бөлүү мурдагы амалдар сыяктуу эле таблицалык жана таблицасыз болуп эки топко бөлүнөт. Демек, бөлүү амалын аткаруу ыкмасы (эрежеси) берилген конкреттүү учурга байланыштуу ар түрдүү болот.

1) **Таблицалык бөлүү**– бир орундуу сандарды бир орундуу сандарга (6:3, 8:3, ...) жана тийиндиси бир орундуу болгон эки орундуу сандарды бир орундуу сандарга (15:3, 63:7, ...) бөлүү учурлары. Бул учурда тийиндилерди табуу тийиндинин аныктоосуна негизделет. Мисалы:

   $15:3=5$, себеби $5 \cdot 3=15$

   $63:7=9$, себеби $9 \cdot 7=63$

   Ошондой эле, көбөйтүү жана бөлүү амалдарынын байланышынан пайдаланып, тиешелүү тийиндини табуу үчүн көбөйтүүнүн таблицасын колдонушат. Бирок, таблицалык бөлүүнүн натыйжалары эске тутулушу зарыл.

2) **Таблицасыз бөлүү**:

а) тегерек сандарды бир орундуу сандарга жана тегерек сандарга бөлүү– бул учур сандарды нөмерлөө жана таблицалык бөлүүгө таянып, оозеки аткарылат. б.а.

60 : 3 = 20 , 800 : 200 = 4

6 онд.:3= 2 онд. 8 жүзд.:2 жүзд.= 4

б) эки, үч орундуу сандарды бир орундуу сандарга бөлүү– бул учур сумманы санга бөлүү эрежесине негизделип, оозеки аткрылат. б.а.

64:2=(60+4):2=60:2+4:2=30+2=32

60:5=(50+10):5=50:5+10:5=10+2=12

492:4=(400+80+12):4=100+20+3=123

в) эки орундуу сандарды эки орундуу сандарга бөлүү– тийиндинин аныктоосу боюнча тандоо жолу менен аткарылат. б.а.

51:17=51	90:15=6
17·2=34	15·4=60
17·3=51	15·5=75
	15·6=90

г) көп орундуу сандарды бир, эки, үч, ж.б. орундуу сандарга бөлүү сумманы санга бөлүү эрежесине негизделип, жазуу жүзүндө (бурч менен) аткарылат. Эн мурда оозеки аткарылуучу учурлары каралып, улам барган сайын татаалдашып бурч менен бөлүү көрсөтүлөт. Б.а.

48:2=(40+8):2=40:2+8:2=24

38:2=(20+18):2=20:2+18:2=19

6003:3=(6000+3):3=6000:3+3:3=2001

4868:2=(4000+800+60+2):2=2000+400+30+1=2431

258:3=(240+18):3=240:3+18:3=86

2916:6=(2400+480+36):6=486

```
_258| 3       _2916| 6       _420| 30
  24 |86         24 |486        30 |14
 ----          ----           ----
 _18            _51           _120
  18             48            120
 ----           ----          ----
   0            _36              0
                 36
                ----
                  0
```

Ушул сыяктуу эле көп орундуу сандарды эки, үч орундуу сандарга бөлүү аткарылат (бурч менен).

Көп орундуу сандарды жазуу жүзүндө бөлүү алгоритмасы төмөнкүчө:

1. Эгер a=b болсо, анда тийинди q=1, калдык r=0.

1. Эгер $a>b$ болуп, алардын разряддарынын саны бирдей болсо, анда b санын 1,2,3,4,5,6,7,8,9 сандарына удаалаш көбөйтүү менен тийинди тандалат, себеби $a<10\cdot b$

2. Эгер $a>b$ болуп, a нын разряддары b нын разряддарынан көп болсо, анда a санынын оң жагына b ны бурч менен бөлүп жазып тийинди жана калдыкты төмөнкү тартипте издейбиз:

а) a санынан b санында канча разряд болсо ошончо разрядды, керек болсо бир разрядга ашык разрядды b дан чоң же барабар болгондой кылып d_1 санын пайда кылабыз. d_1 санын b га бөлгөндөгү тийиндини тандоо жолу менен 1,2,3,4,5,6,7,8,9 сандарын b га көбөйтүү аркылуу q_1 тийиндисин таап, бурчтун астына (b нын астына) жазабыз;

б) q_1 ди b га көбөйтүп d_1 дин астына төмөнкү разрядынан баштап жазабыз;

в) bq_1 көбөйтүндүсүнүн астын сызып $r_1=d_1\text{-}bq_1$ айырмасын табабыз;

г) r_1 айырмасынын оң жагына a нын кийинки бөлүнө элек разряддарынан d_2 санын пайда кылып, аны b менен салыштырабыз;

д) эгер пайда болгон d_2 саны b дан чоң же барабар болсо, анда 1 же 2 пункттагы ишти аткарабыз. Бул учурда пайда болгон q_2 тийиндисин q_1 ден кийин жазабыз;

е) эгер d_2 b дан кичине болсо, анда b дан чоң же барабар болгондой кылып, a нын кийинки разряддарын алып түшөбүз. Пайда болгон d_3 санын b га бөлүп q_3 тийиндисин тандайбыз, аны q_1q_2 нин артына жазабыз. Жогоркудай эле $r_3=d_3\text{-}bq_3$ айырмасын табабыз. Бул процессти a нын акыркы (эң кичине) разряддык бирдигин алып түшүп, бөлгөнгө чейин улантабыз.

27. Амалдарды текшерүү эрежелери.

Арифметикалык амалдардын натыйжалары менен компоненттеринин арасындагы көз карандылыктардан жана кошуу, көбөйтүү амалдарынын орун алмаштыруу касиеттеринен пайдаланып, ар бир арифметикалык амалдын туура же туура эмес аткарылгандыгын билүүгө болот.

Ар бир амал эки түрдүү жол менен текшерилет.

Текшерүү эрежелери:

1) Кошуу амалын текшерүү:

а) Кошуу амалын текшерүү үчүн суммадан кошулуучулардын бирин кемитүү керек. Эгер экинчи кошулуучу келип чыкса, анда амал туура аткарылган. Мисалы:

425+379=804. Текшерүү: 804−425=379

б) Кошуу амалын кошуу менен текшерүү үчүн кошулуучуларды орун алмаштырып кошуу керек, эгерде мурдагы эле сумма келип чыкса, анда аткарылган амал туура. Мисалы:

$$\begin{array}{rcr} 425 & \text{Текшерүү:} & 379 \\ +379 & & +425 \\ \cline{1-1}\cline{3-3} 804 & & 804 \end{array}$$

1) Кемитүү амалын текшерүү:

а) Кемитүү амалын кошуу менен текшерүү үчүн айырмага кемитүүчүнү кошуу керек. Эгер кемүүчү келип чыкса, анда аткарылган амал туура. Мисалы:

$$\begin{array}{rcr} {}_{-}6724 & \text{Текшерүү:} & 5485 \\ 1239 & & +1239 \\ \cline{1-1}\cline{3-3} 5485 & & 6724 \end{array}$$

б) Кемитүү амалын кемитүү менен текшерүү үчүн кемүүчүдөн айырманы кемитүү керек. Эгер кемитүүчү келип чыкса, анда аткарылган амал туура. Мисалы:

$$\begin{array}{rcr} {}_{-}6724 & \text{Текшерүү:} & {}_{-}6724 \\ 1239 & & 5485 \\ \cline{1-1}\cline{3-3} 5485 & & 1239 \end{array}$$

2) Көбөйтүү амалын текшерүү:

а) Көбөйтүү амалын бөлүү менен текшерүү үчүн көбөйтүндүнү көбөйтүлүүчүлөрдүн бирине бөлүү керек. Эгер экинчи көбөйтүлүүчү келип чыкса, анда аткарылган амал туура.

Мисалы: $420\cdot245=102900$

Текшерүү: $102900:420=245$

б) Көбөйтүү амалын көбөйтүү менен текшерүү үчүн көбөйтүлүүчүлөрдүн ордун алмаштырып көбөйтүү керек. Эгер ошол эле көбөйтүндү келип чыкса, анда амал туура аткарылган.

Мисалы: $420\cdot245=102900$

Текшерүү: $245\cdot420=102900$

3) Бөлүү амалын текшерүү:

а) Бөлүү амалын көбөйтүү менен текшерүү үчүн тийиндини бөлүүчүгө көбөйтүү керек. Эгер бөлүнүүчү келип чыкса, анда аткарылган амал туура болот.

Мисалы: $102900:245=420$, Текшерүү: $420\cdot245=201900$.

б) Бөлүү амалын бөлүү менен текшерүү үчүн бөлүнүүчүнү тийиндиге бөлүү керек. Эгер бөлүүчү келип чыкса, анда аткарылган амал туура.

Мисалы: 102900:245=420

Текшерүү: 102900:420=245

VI ГЛАВА
Эсептөө системалары.

1. Позициялык эмес эсептөө системалары.

Байыркы замандан баштап эле адамзат үчүн өзүнүн күндөлүк турмушуна керек болгон об'ектилерди саноонун натыйжасын узагыраак эстеп калуу жана алар менен эң жөнөкөй операцияларды жүргүзүү зарылчылыгы пайда болгон. Ал үчүн натуралдык сандарды шарттуу белгилер менен белгилөө керек эле. Натуралдык сандардын эң алгачкы шарттууу белгилери б.а. алардын жазылышы таштагы же жыгачтагы сызыкчалар, жиптеги түйүндөр, идишке салынган ашык-сөөкчөлөр же таштар болгон. Таштардын, түйүндөрдүн же сызыкчалардын саны ошол натуралдык сандагы бирдиктердин санына барабар болот. Мисалы, жортуулга аттанган жоокерлердин санын эстеп калуу үчүн алардын ар бири айылдын четине бирден таш таштап кетишкен. Ал эми алардын канчасы согуштан кайткандыгын жана канча жоокер согушта курман болгондугун билүү үчүн айылга кирээрде мурдагы коюлган таштардан бирден алууну талап кылышкан. Сандарды мындай түрдө «жазуу» өтө ыңгайсыз, себеби, чоң сандарды жазуу үчүн көп сандагы сызыкчаларды сызуу, түйүнчөлөрдү түйүүгө туура келет. Аларды салыштыруу жана алар менен тигил же бул амалды аткаруу бир топ кыйын болгон. Ошондуктан, натуралдык сандарды жазуунун башка ыңгайлуу жолдорун табууга аргасыз болушкан. Жогорку «жазмаларды» (сызыкчалар, . түйүндөр, сөөкчөлөр, ж.б.) бирдей сандагы элементтери бар топторго бириктире башташкан. Көбүнчө об'ектилерди адамдын манжалары аркылуу саноо жүргүзүлгөндүктөн бир топко 10 сызыкчаны– бир адамдын колундагы манжалардын санын бириктиришкен. Саноого бир нече киши катышкан. Биринчи адамдын колдорунун манжалары бүгүлүп бүткөндө, экинчи адам бир манжасын бүктөгөн. Экинчи адамдын да 10 манжасы тең бүктөгөндө үчүнчү адамдын бир манжасы бүктөлөт. Ошентип, биздин белги менен жазганда 1000 ге чейин сандарды «жазууга» мүмкүн болот. Мисалы, үчүнчү адамдын үч, экинчинин беш, ал эми биринчи адамдын эки манжасы бүктөлгөн болсо, анда азыркы учурдагы белги менен 352 саны «жазылган» болот.

Ушул сыяктуу эле бир топко 20 сызыкчаны бириктирген (адамдын колдорунун жана буттарынын манжалары) учурлар да болгон. Мындай 20 дан саноо байыркы мезгилде эң жогорку маданиятка жетишкен америкадагы Майя уруусунда колдонулган.

Алардын маданияты XVI кылымда испандык баскынчылар тарабынан жок кылынган. Ушул мезгилде да француздар «сексен жети» дегендин ордуна «төрт жолу жыйырма жана жети», же «токсон алты» дегендин ордуна «төрт жолу жыйырма жана он алты» деп айтышат. Жыйырмадан эсептөөнүн калдыгы азыркы учурда да Дания жана кээ бир Европа элдеринин тилинде кездешет.

Ошондой эле 12 ден эсептеген учурлар да болгондугун тарыхтан жолуктурууга болот. Ал бир колдун төрт манжасында 12 муун болгондугуна байланыштуу деп айтылат. Өтө көп сызыкчаларды сызуу ыңгайсыз болгондуктан ар бир группаны кандайдыр өзгөчө белги менен белгилей (сүрөттөй) башташкан. Ушул мезгилге чейин жеткен байыркы жазма эстеликтеринде 10, 100, ж.б. сандары үчүн өзгөчө белгилер пайдалангандыгы белгилүү. Биздин мезгилге жеткен математикалык тексттер мындан 5000 жыл мурда байыркы Вавилондуктар тарабынан жазылган (айрым окумуштуулардын изилдөөлөрү боюнча Вавилондуктар мындай маалыматтардын алардан да байыркы эл– **шумерлерден** алышкан деп божомолдошот).

Ошондой эле мындан 4000 жыл мурда байыркы Египетте жазылган математикалык тексттер ушул убакка чейин жетип келген. Аларда 1 саны– I, 10 саны–∩, 100 саны– C жана башка шарттуу белгилери менен белгилешкен. Мисалы, 45 санын төмөнкүчө жазышкан:

∩∩III   III∩∩
∩∩II   же   II∩∩

Демек, санда канча разряд бар болсо, ошончо белги колдонулган. Жогоруда көрүнгөндөй 10 менен 100, 100 менен 1000 сандары үчүн колдонулган белгилер бири-бирине эч кандай байланышы же тиешеси жок.

Сандарды жазуунун мындай системалары **позициялык эмес** системалар деп аталышат. Бул түшүнүк **«позиция»** деген сөздөн алынып, анын бул учурдагы мааниси **«ээлеген орду»**, **«аткарган кызматы»** дегенди билдирет.

Позициялык эмес системаларда тигил же бул санды жазууда колдонулган белгинин мааниси анын жазмадагы ээлеген ордуна көз каранды эмес (Жогорудагы 45 санынын жазылыштарын кара!).

Ушул мезгилге чейин байыркы Римдиктер сандарды жазуу үчүн колдонулган позициялык эмес системасы пайдаланылат. Мындан 200-300 жыл мурда бардык иш кагаздарындагы сандар араб цифралары менен эмес, рим цифралары менен жазылчу.

Сандарды жазуудагы рим системасынын негизин I, V, X, L, C, D, M белгилери түзөт. Алар 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 сандарын белгилешет. Бул белгилердин биринчи үчөө– адамдын колундагы манжалардан келип чыгышат, ал эми C жана M тамгалары латындын centum («жүз») жана mille («миң») деген сөздөрүнүн биринчи тамгалары.

Римдиктер сандарды жазуу үчүн аларды миңдиктердин, жарым миңдиктердин, жүздүктөрдүн, жарым жүздүктөрдүн, ондуктардын, бештиктердин жана бирдиктердин суммасына ажыратышкан. Мисалы: XXXXVII–47 санынын, DCLXXVIII–678 санынын жазылыштары болот. Мында цифралар солдон оңго карай азайган тартипте жазылат. Бирок, айрым учурда кичине маанидеги цифра чоң маанидеги цифрадан мурда жазылышы да мүмкүн. Бул учурда алар кошулбастан, чоң цифрадан кичинесин кемитүү керек.

Мисалы: IV жазуусунда 5–1=4
IX жазуусунда 10–1=9
XL жазуусунда 50–10=40
CM жазуусунда 1000–100=900 болот.

Демек, 1969 саны MCMLXIX деп жазылат.

Байыркы гректерде да эсептөө системасы позициялык эмес болгон. Алар цифраларды грек алфавитинин тамгалары менен белгилешкен. 1,2,3,4,5,6,7,8,9 сандарын биринчи тогуз тамгасы менен ($\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, $\delta=4$, ...), 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 сандарын кийинки тогуз тамга менен ($\iota=10$, $\chi=20$, $\lambda=30$, $\mu=40$, ...), ал эми 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 сандарын акыркы 9 тамга менен ($\rho=100$, $\sigma=200$, $\tau=300$, ...) белгилешкен. Сандар сөздөрдөн айырмаланышы үчүн сандын үстүнө сызыкча коюшкан. Мисалы, 243 санын $\overline{\sigma\mu\gamma}$ түрүндө жазышкан. Мындай принцип менен жазууда айрым кемчиликтер болот. мисалы, τ саны (300), γ (3) санынан 100 эсе чоң экендиги ачык көрүнбөйт.

Байыркы орустардын маданияты византиялыктардын, б.а. гректердин маданиятына жакын болгондуктан, алар да тигилерге окшоп сандарды орус алфавитинин тамгалары менен белгилешкен. Сызыкчанын ордуна (титло) белги коюшкан. Андан тышкары чоң ондук разряддарды атоо үчүн өзгөчө сөздөрдү колдонушкан. Б.а.

10 миң=1 тьма.
10 тем=1 легион.
10 легион=1 леодра, ж.б.

Аларды жазуу үчүн да ар түрдүү белгилер пайдаланылган. Мисалы, 10 колода=10^{49} саны деп  шартуу белги колдонушкан.

Сандарды жазуунун мындай системалары аларды сызыкчалар, таштар, түйүндөр менен белгилегенге караганда бир топ ыңгайлуу жана алга жылуу болгон. Бирок, бул системаларда арифметикалык ар түрдүү операцияларды аткаруу өтө ыңгайсыз, айрым учурда мүмкүн эмес. Мисалы, MMDCCLXII жана MCDXLVIII сандарын же $\overline{\varphi\lambda\sigma}$ жана $\overline{\alpha\pi\gamma\tau}$ сандарын көбөйтүп көрүңүздөрчү! Ошондуктан адамзаты сандарды жазуунун башка системаларын издеп табууга аргасыз болгон.

2. Позициялык эсептөө системалары.

Математиканын өнүгүшүндөгү эң ири жетишкендик болуп позициялык эсептөө системаларынын пайда болушу эсептелет. Мындай системаларда бир эле белги (бир эле цифра) сандын жазылышындагы ээлеген ордуна (позициясына) жараша ар түрдүү сандарды белгилейт. Алардын ичинен практикада эң кеңири колдонулганы **ондук эсептөө системасы** болот. Мисалы, 44444 санын жазууда бир гана «4» деген белги колдонулат да беш төрттүн ээлеген ордуна жараша беш түрдүү санды белгилеши көрүнүп турат (4, 40, 400, 4000, 40000).

Практикада ондук эсептөө системасынан башка да он экилик, алтымыштык, бештик, экилик, ж.б. позициялык системалар кездешет. Позициялык эсептөө системасынын эң алгачкысы болуп, байыркы Вавилондуктар колдонгон алтымышынчы эсептөө системасы эсептелет. Алар сандарды жазуу үчүн эки гана жана белгилерин пайдаланышкан. Алардын биринчиси 1 жана 60, экинчиси– 10 жана 600 сандарын белгилейт. Булар ээлеген ордуна жараша ар түрдүү сандарды билдиришкен.

Алтымыштык эсептөө системасынын айрым издери ушул мезгилге чейин жетип келген. Мисалы, 1 саат=60 минута, 1 минута=60 секунда, толук бурч 360^0 ка барабар, ж.б. Ошондой эле алтымыштык бөлчөктөр XVI кылымга чейин астрономиялык эсептөөлөрдө колдонулуп келген.

Жогоруда аталган практикалык колдонууга ээ болгон ондук эсептөө системасы жөнүндө биздин эрага чейинки III кылымда байыркы грек окумуштуусу Архимед өзүнүн «Псаммит» («Кумду эсептөө») деген китебинде иштеп чыккан. Ал 10 санына негизделген эсептөө системасында өтө чоң сандарды атоого мүмкүнчүлүк түзгөн. Ал сандардын чоңдугу, Архимеддин айтуусу боюнча «радиусу Жерден кыймылсыз жылдыздарга чейинки аралык болгон шардын ичиндеги» кумдардын санына барабар. Чындыгында Архимеддин эң чоң саны бир жана анын артында $8\cdot10^{16}$ нөлү бар болгон (Мынчалык нөлдөр Жерден Күнгө чейинки тартылган лентага батпайт).

Азыркы мезгилдеги колдонулуп жаткан ондук эсептөө системасы биздин эранын болжол менен VI кылымда Индияда калыптанган. Алар илимге биринчи болуп нөль саны үчүн өзүнчө белги киргизишкен («Нуль» сөзү латындын «nullum»– эч нерсе эмес деген сөзүнөн; «0» белгиси индустардын «сунья» («бош») деген сөзүнөн).

Индиялыктардын жазгандарын IX кылымда Орто Азиялык улуу математик, алгебранын негиздөөчүсү Мухаммед аль Хорезм кеңейтип, чоң колдонмо жазган. Ал эмгек 12 кылымында латын тилине которуп, XIII кылымда Италияга жетип, бардык Европа өлкөлөрү үчүн негизги окуу китеби катарында пайдаланылган. Ошол себептүү Европалык илимий китептерде 0,1,2,3,...,9 цифраларын (цифра сөзү арабча «сыфр»–«бош орун») араб цифралары деп жүрүшөт. Чындыгында алар индустар тарабынан илимге кирген.

3. Натуралдык сандардын ондук эсептөө системасында жазылышы.

Аныктоо: n натуралдык санынын ондук жазылышы деп аны $n=n_k\cdot10^k+n_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+n_1\cdot10+n_0$ түрүндө сумма катары жазуу аталат. Мында n_k, n_{k-1},...,n_1,n_0– терс эмес бүтүн сандар, $n_k\neq0$ жана алар 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 маанилерин кабыл алат.

Жазылышы: $n=\overline{n_kn_{k-1}\ldots n_1n_0}$. Эгер n_k,..., n_0 лар цифралар болсо сызыкча коюлбайт.

Мисалы: $670436=6\cdot10^5+7\cdot10^4+0\cdot10^3+4\cdot10^2+3\cdot10+5$

$1,10,10^2,10^3,\ldots,10^k$ сандары **разряддык бирдиктер** деп аталышат. Оңдон солго карай биринчи, экинчи, үчүнчү, ж.б. разряддар болушат жана ар бир разряд (биринчиден башка) өзүнөн мурдагы разряддын 10 бирдигин түзөт. Оңдон солго карай ар бир үч разряд **класстарды** түзөт. Алардын аталыштары:

I класс– бирдиктер классына
- 1-разряд– жөнөкөй бирдиктер,
- 2-разряд– жөнөкөй ондуктар,
- 3-разряд–жүздүктөр.

II класс– миңдиктер классына
- 4-разряд– жөнөкөй миңдиктер,
- 5-разряд– он миңдиктер,
- 6-разряд– жүз миңдиктер.

III класс– миллиондор классына

7-разряд– жөнөкөй миллиондор,

8-разряд– он миллиондор,

9-разряд– жүз миллиондор.

IV класс– миллиарддар классына

10-разряд– жөнөкөй миллиарддар

11-разряд– он миллиарддар

12-разряд– жүз миллиарддар

Кийинки класстар: биллиондор (триллиондор), квадриллиондор, квинтиллиондор, секстиллиондор, септиллиондор, ж.б. болуп кете берет.

Натуралдык сандарды мынтип класстарга бөлүү аларды окууга жана жазууга ыңгайлуу шарт түзөт. Ошондой эле ондук эсептөө системасында сандардын аталыштары үчүн да аз сандагы эле сан атооч сөздөрү пайдаланылат. Мисалы, миллиардга чейинки сандарды атоо үчүн кыргыз тилинде 22 гана сөз, 10 гана цифра жетиштүү. Калгандарын ушулардын эле жардамы менен атоого жана жазууга болот.

Ар кандай n натуралдык санын жогоркудай сумма түрүндө ондук системада жазууга болобу, эгер болсо канча түрдүү жол менен ажыратылат?

Бул суроого жооп берүүдөн мурда төмөнкү айтылыштын тууралыгын далилдейбиз:

‖ Ар кандай n натуралдык саны үчүн $n<10^n$.

Чындыгында, эгер $k<l$ болсо, анда $10^k<10^l$ болот. Ошондуктан $10,\ 10^2,\ \ldots,10^n$ сандары бири биринен айырмаланышат. Демек, алардын эң чоңу n ден чоң болот. б.а. $n<10^n$.

$10^s<n$ болгон s натуралдык сандарынын көптүгүн A_n деп белгилейбиз. Анда $n<10^n$ болгондуктан A_n көптүгүндөгү бардык s сандары үчүн $s\leq n$ болот, ошол себептүү A_n көптүгүндө эң чоң сан болот. Аны k деп белгилесек, анда $10^k\leq n<10^{k+1}$ болот. Ар кандай n натуралдык саны үчүн анын ондук жазылыш бар экендигин k дан болгон математикалык индукция методу менен далилдейбиз. Мында $10^k\leq n<10^{k+1}$

Эгер $k=0$ болсо, анда $1\leq n<10$ барабардыгы аткарылып, n саны бир орундуу сан болот да бир гана цифра менен жазылат.

Айталы 10^k дан кичине болгон бардык натуралдык сандар үчүн ондук жазылыштар бар болсун. Анда $10^k\leq n<10^{k+1}$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай каалаган n санын тандап алабыз.

Эгер n саны 10^k га бөлүнсө, анда $n=n_k\cdot 10^k$ болот, мында $1\leq n_k<10$. Демек, n саны үчүн ондук жазылыш бар.

Эгер n санын 10^k га бөлгөндө r калдыгы бар болсо (б.а. $n=n_k\cdot10^k+r$), анда $r<10^k$ болуп, индукциянын шарты боюнча r саны $r=n_s\cdot10^s+\ldots+n_1\cdot10+n_0$ түрүндөгү ондук жазылышка ээ болот.

Анда $n=n_k\cdot10^k+r=n_k\cdot10^k+n_s\cdot10^s+\ldots+n_0$ болот. Бул сумма n үчүн ондук жазылыш болбойт, себеби $s<k-1$ болгондо бул суммага 10 дун кээ бир даражалары кирбей калат. Эгер бул суммага нөль коэфициенттүү жетишпеген кошулуучуларды кошсок, изделүүчү ондук жазылыш келип чыгат:

$$n=n_k\cdot10^k+n_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+n_1\cdot10+n_0.$$

Демек, 10 дон кичине болгон бардык сандар ондук жазылышка ээ экендигин, ал эми $10^k\leq n<10^{k+1}$ боло турган 10^k дан кичине сандардын каалаган саны n үчүн ондук жазылыштын бар экендигин далилдедик. Демек, математикалык индукция принциби боюнча бардык натуралдык сандар ондук жазылышка ээ болушат.

Эми ар бир n натуралдык сан бир гана ондук жазылышка ээ боло тургандыгын далилдейбиз. Акыркы барабардыкта k саны $10^k\leq n<10^{k+1}$ шарты менен бир маанилүү аныкталат. k саны аныкталгандан сон n_k коэфициенти

$n_k\cdot10^k\leq n<(n_k+1)\cdot10^{k+1}$ менен аныкталат. Ушул сыяктуу эле n_{k-1}, $\ldots,n_1,n_0$ цифралары да аныкталышат.

Сандардын ондук системада жазылышы айрым маселелерди чечүүнү жеңилдетет. Мисалы, эки натуралдык сандарды салыштыруу алардын ондук жазылыштары аркылуу жеңил чечилет. Б.а. эгер m жана n натуралдык сандары берилип, алардын ондук жазылыштары

$$n=n_k\cdot10^k+n_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+n_0,\ n_k\neq0.$$

$m=m_t\cdot10^t+m_{t-1}\cdot10^{t-1}+\ldots+m_0,\quad m_t\neq0$ болсо, жана төмөнкү шарттардын

а) $k<t$;

б) $k=t$; бирок $n_k<m_t$;

в) $k=t$; $n_k=m_k, n_s=m_s$, бирок $n_{s-1}<m_{s-1}$

бири аткарылса, анда $n<m$ болот. Чындыгында, айталы $k<t$ болсун. Анда $10^{k+1}\leq10^t$. Бирок $n<10^{k+1}$ жана $10^t\leq m$ болгондуктан

$$n<10^{k+1}\leq10^t\leq m,$$ б.а. $n<m$ болот.

Ушул сыяктуу эле эгер $k=t$, бирок $n_k<m_k$ болсо, анда $n_{k+1}\leq m_k$ болот. Ошондуктан $(n_{k+1})\cdot10^k\leq m_k\cdot10^k$. Ал эми $n<(n_{k+1})\cdot10^k$ жана $m_k\cdot10^k\leq m$ болгондуктан $n<(n_{k+1})\cdot10^k\leq m_k\cdot10^k\leq m$, б.а. $n<m$ болот. (в) учур да ушул сыяктуу эле талкууланат.

Жогорулардан: эгер m жана n түрдүү натуралдык сандар болушса, анда (а), (б), (в) шарттарынын бири аткарылат, же m жана n дин ролдорун өзгөртүүдөн келип чыккан үч шарттын бири аткарылат.

Ошондуктан, эгер $m \neq n$ болсо, анда ал үч шарт $m>n$ экендигин тактоого мүмкүнчүлүк берет

Мисалы:

а) 4527<12325, себеби 4527 санында 12325 санына караганда разряддардын саны аз.

б) 4527<6525, себеби разряддарынын саны бирдей болгону менен 4527 санындагы эң чоң разряддык сан (4), экинчи сандын тиешелүү разряддык бирдигинен (6) кичине.

в) 3456<3476, себеби разряддарынын саны жана миңдик, жүздүк разряддык бирдиктери бирдей болгону менен 3456 санында ондуктардын саны (5), экинчи сандагы ондуктардын санынан (7) кичине.

4. Сандарды башка позициялык эсептөө системаларда жазуу.

Илимде ондук позициялык эсептөө системасынан башка да позициялык системалар бар экендиги жогоруда айтылды. Алардын бири-биринен болгон айырмасы сандарды белгилөө үчүн колдонулган шарттуу белгилердин ар түрдүү болушу гана эмес, эсептөө процессинде кайсы санды негиз катары кабыл алгандыгында болот. Ошол себептүү практикада экилик, үчтүк, он экилик, алтылмыштык, ж.б. эсептөө системалары кездешет. Жалпысынан алганда негиз үчүн экиден чоң же барабар болгон ар кандай p натуралдык сан алынышы мүмкүн.

Ондук эсептөө системасында n натуралдык санынын жазылышы $n=n_k \cdot 10^k+n_{k-1} \cdot 10^{k-1}+\ldots+ n_1 \cdot 10+n_0$ түрүндө болору белгилүү. Мында ар кандай натуралдык санды жазуу үчүн 10 шарттуу белгилер (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) колдонулат. Демек, экилик системада эки гана белги (0,1), үчтүк системада үч белги (0,1,2), ж.б. негизи $p \geq 2$ болгон системада p белги (0,1,2,3,...,p-1) колдонулары ачык көрүнүп турат.

Аныктоо: n натуралдык санынын p негиздүү эсептөө системасындагы жазылышы деп анын

$$n=n_k \cdot p^k+n_{k-1} \cdot p^{k-1}+\ldots+n_1 \cdot p+n_0$$

суммасы түрүндө көрсөтүлүшү аталат. Мындагы $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_1, n_0$ коэфициенттери 0,1,2,...,p-1 маанилерин кабыл алышат жана $n_k \neq 0$.

Жазылышы: $n= \overline{n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0}_p$ болот. Эгер цифралар менен берилсе сызыкча коюлбайт. Мисалы: 3201_4, 67305_8, 1000001_2. Демек, бул сандардын берилген системаларда жазылыштары төмөнкүчө болот:

$3201_4=3\cdot4^3+2\cdot4^2+0\cdot4+1$

$67305_8=6\cdot8^4+7\cdot8^3+3\cdot8^2+0\cdot8+5$

$1000001_2=1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2+1$

Окулушу: 3201_4 саны «үч, эки, нөль, бир төрттүк системада» деп окулат.

Эсептөө системаларынын эң «үнөмдүүсү» (сандарды жазууда эки гана цифра колдонулат) экилик эсептөө системасы болгондуктан электрондук эсептөө машиналары ушул системада иштешет.

Негизи 10 дон башка болгон сандарды салыштыруу ондук системадагыдай эле жүргүзүлөт. Мисалы, $12012_3>2101_3$, $2101_3<2102_3$,… Бирок сандар ар башка эсептөө системаларында берилсе, анда аларды салыштырууга болбойт. Айталы $2101_3\neq2101_5$. Бул учурда ал сандарды бир эсептөө системасына келтирүү керек. Б.а.

1) $n=\overline{n_kn_{k-1}\ldots n_1n_0}_p$ санын ондук системада жазгыла. Б.а. негизи p болгон системадан ондук системага өткөрүп жазуу керек. Анда, берилген санды p эсептөө системасында жазылышындагы $n=\overline{n_kn_{k-1}\ldots n_1n_0}_p=n_k\cdot p^k+n_{k-1}\cdot p^{k-1}+\ldots+n_1\cdot p+n_0$ сумманы тиешелүү амалдарды аткарып эсептөө керек. Пайда болгон сан изделүүчү сан болот.

Мисалы: а) $23012_4=2\cdot4^4+3\cdot4^3+0\cdot4^2+1\cdot4+2=710_{10}$

б) $\overline{\alpha4\beta}_{12}=10\cdot12^2+4\cdot12+11=1499_{10}$, мында α жана β цифралары 12 лик системада 10 жана 11 сандарынын шарттуу белгилери.

Сандын ажыратылып жазылышындагы сумманы жөнөкөй өзгөртүп түзүүлөрдү аткарабыз:

$23_4=2\cdot4+3$

$231_4=2\cdot4^2+3\cdot4+1=(2\cdot4+3)\cdot4+1$

$2310_4=2\cdot4^2+3\cdot4^2+1\cdot4+0=((2\cdot4+3)\cdot4+1)\cdot4+0$

$23101_4=2\cdot4^4+3\cdot4^3+1\cdot4^2+0\cdot4+1=(((2\cdot4+3)\cdot4+1)\cdot4+0)\cdot4+1$, ж.б.

Мындан негизи 10 дон башка болгон эсептөө системасынан ондук системага өтүүнүн б.а. жогорку амалдарды аткаруунун төмөнкү ыкмасын сунуш кылууга болот:

$$\begin{array}{l}
{}_{\times}\,23101_4 = 721_{10} \\
\underline{\ 4\qquad\quad} \\
8+3=11 \\
\hspace{3em}\underline{{}_{\times}\,4\qquad\quad} \\
\hspace{3em}44+1=45 \\
\hspace{7em}\underline{{}_{\times}\,4\qquad\quad} \\
\hspace{7em}180+0=180 \\
\hspace{12em}\underline{{}_{\times}\,4\qquad\quad} \\
\hspace{12em}720+1=721
\end{array}$$

2). Ондук эсептөө системасында жазылган санды p системасында жазуу керек болсун. Ал үчүн $n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot p + n_0$ ажыратылышындагы $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_1, n_0$ коэфициенттерин табуу керек болот. Мында $1 \le n_k < p$, $0 \le n_{k-1} < p, \ldots,$ $1 \le a_0 < p$ болуш керек. Жогорку сумманы өзгөртүп түзүү менен $n = p \cdot (n_k \cdot p^{k-1} + \ldots + n_1) + n_0$ барабардыгын алабыз. Бул барабардыктан, n санын p санына бөлгөндө n_0 калдыгы пайда болору көрүнүп турат. Ушул сыяктуу эле $n_k \cdot p^{k-1} + \ldots + n_2 \cdot p + n_1$ туюнтмасын өзгөртүп түзүү менен $p \cdot (n_k \cdot p^{k-2} + \ldots + n_2) + n_1$ туюнтмасын алып, жогорку пайда болгон тийиндини p га бөлгөндө n_1 калдыгы келип чыгат.

Бул бөлүүнү тийинди p дан кичине сан болгонго чейин бөлүп, изделүүчү сандын эң чоң разряддык бирдиги n_k ны алабыз. Мында $n_0, n_1, \ldots, n_k$ – калдыктар.

Мисалы:

а) $76_{10} = x_5$

$$\begin{array}{lll}
-76 & \underline{5} & \\
\underline{\;5} & 15 & \underline{5} \\
26 & \underline{15} & 3(n_2) \\
\underline{25} & 0\,(n_1) & \\
1\,(n_0) & &
\end{array}$$

$x = 301_5$

б) $497_{10} = x_4$

$$\begin{array}{lllll}
-497 & \underline{4} & & & \\
\underline{\;4} & 124 & \underline{4} & & \\
\;9 & \underline{12} & -31 & \underline{4} & \\
-\underline{8} & -4 & \underline{28} & -7 & \underline{4} \\
\;17 & \underline{\;4} & 3\,(n_2) & \underline{4} & 1\,(n_4) \\
-\underline{16} & 0\,(n_1) & & 3\,(n_3) & \\
\;1\,(n_0) & & & &
\end{array}$$

$x = 13301_4$

3). Сандын p системасында жазылышынан ф системасындагы жазылышына өтүү үчүн ал санды эң оболу ондук системада жазып алып, андан q системасына өтүү керек.

5. Ондук эсептөө системасынан башка позициялык эсептөө системаларында арифметикалык амалдарды аткаруу.

Көптүктөгү элементтердин саны анын кайсы тилде аталышына жана кандай эсептөө системасында жазылышына көз каранды эмес. Ошондой эле көптүктөрдүн биригүүсүндөгү, кесилишиндеги, толуктоосундагы жана декарттык көбөйтүндүсүндөгү элементтердин саны да эсептөө системасына көз каранды эмес. Натуралдык сандарды кошуу, кемитүү, көбөйтүү жана бөлүү алгоритмалары да кайсы эсептөө системасын тандап алганга байланыштуу эмес.

Демек, ондук эсептөө системасында аталган операциялар кандай жүргүзүлсө, башка системада да ошондой эле жүргүзүлөт.

Конкреттүү мисалдарда карап көрөлү.

<u>Кошуу:</u> Кошуу амалы ар кандай эсептөө системасында кошуунун таблицасын түзүүдөн башталат.

Мисалы: экилик, үчтүк жана сегиздик эсептөө системаларында кошуу таблицалары төмөнкүчө болот:

	0	1
0	0	1
1	1	10

q=2

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

q=3

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

q=8

Көп орундуу сандарды кошуу алгоритмасы, жогоруда айтылгандай, ондук системадагыга окшош эле. Б.а.

$$\begin{array}{rrr} 673445_{10} & 101001_{2} & 45342_{8} \\ \underline{+\ 13839}_{10} & \underline{+11110}_{2} & \underline{+17231}_{8} \\ 687284_{10} & 1000111_{2} & 64573_{8} \end{array}$$

Тиешелүү разряддык бирдиктерди кошкондо ондук системадагыдай эле кошуп, берилген негиз канча экендигин эске алууну унутпоо керек. Мисалы, $7_8+5_8=14_8$ деп жазуу керек.

<u>Кемитүү</u>: Бир орундуу сандардан бир орундуу сандарды жана айырмасы бир орундуу болгон эки орундуу сандан бир орундуу санды кемитүү жогорку сыяктуу түзүлгөн кошуунун таблицаларынын жардамы менен аткарылат.

Калган таблицасыз учурлары ондук эсептөө системасындагыдай аткарылат. Мисалы:

$$\begin{array}{rrr} \_56008_{10} & \_110100_{2} & \_73500_{8} \\ \underline{4939}_{10} & \underline{11011}_{2} & \underline{4711}_{8} \\ 51069_{10} & 11001_{2} & 66567_{8} \end{array}$$

<u>Көбөйтүү</u>: Ар кандай эсептөө системасында натуралдык сандарга көбөйтүү кошуу сыяктуу эле таблица түзүүдөн башталат. Экилик, үчтүк жана сегиздик эсептөө системаларындагы көбөйтүү таблицасын түзөбүз.

	0	1
0	0	0
1	0	1

q=2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

q=3

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	53	61

q=8

Мисалы:

$$\begin{array}{rrr}
\times\ 7062_{10} & \times\ 7062_{8} & \times\ 1011_{2} \\
\underline{13_{10}} & \underline{13_{8}} & \underline{101_{2}} \\
21186 & 25226 & 1011 \\
\underline{+7062\ } & \underline{+7062\ } & \underline{+1011\ } \\
91806_{10} & 116046_{8} & 110111_{2}
\end{array}$$

<u>Бөлүү</u>: Бөлүү амалынын таблицалык учурлары тиешелүү көбөйтүү таблицалары аркылуу аткарылат. Ал эми калган учурлары ондук системадагыдай эле алгоритм аркылуу бурч менен жүргүзүлөт. Мисалы:

$$\begin{array}{r|l}
-13815_{10} & 45_{10} \\ \cline{2-2}
\underline{135\ \ } & 307_{10} \\
-315 & \\
\underline{315} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-2651_{8} & 25_{8} \\ \cline{2-2}
\underline{25\ \ \ } & 105_{8} \\
-151 & \\
\underline{151} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-1101001_{2} & 101_{2} \\ \cline{2-2}
\underline{101\ \ \ \ \ } & 10101_{2} \\
-110\ \ \ \ & \\
\underline{101\ \ \ \ } & \\
-101 & \\
\underline{101} & \\
0 &
\end{array}$$

VII ГЛАВА

Терс эмес бүтүн сандардын бөлүнүүчүлүгү.

1. Бөлүнүүчүлүк катнаштыгы жана анын касиеттери.

Аныктоо: a терс эмес бүтүн саны жана b натуралдык саны берилсин. Эгер a ны b га бөлгөндө калдык нөлгө барабар болсо, анда b саны a нын бөлүүчүсү деп аталат.

Бул аныктоодон, эгер b саны a нын бөлүүчүсү болсо, анда $a=bq$ барабардыгы аткарыла тургандай q саны табыла тургандыгы келип чыгат.

Мисалы, 7 саны 35 тин бөлүүчүсү. Ошондуктан $35=7\cdot5$ барабардыгы туура боло тургандай 5 саны табылат.

Мында «бөлүүчү» жана «берилген сандын бөлүүчүсү» деген терминдердин мазмундары эки башка экендигин эстен чыгарбоо керек.

Мисалы, 25 санын 6 га бөлсөк, анда 6 саны бөлүүчү болот, бирок 25 санынын бөлүүчүсү боло албайт. Эгер 30 санын 6 га бөлсөк, анда бул эки түшүнүктүн мазмуну дал келет.

Эгер b саны a санынын бөлүүчүсү болсо, анда «a саны b га эселүү» же «a саны b га бөлүнөт» деп айтышат жана $a \vdots b$ деп шарттуу түрдө жазылат.

Берилген сандын бөлүүчүсү ал сандан ашпагандыктан, анын бөлүүчүлөрүнүн көптүгү чектүү көптүк болору анык. Мисалы, 36 санынын бөлүүчүлөрүнүн көптүгү болуп {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 18, 36} чектүү көптүгү эсептелет.

Натуралдык сандар бөлүүчүлөрүнүн санына жараша **жөнөкөй** жана **курама** болуп эки түрдүү болушат.

Аныктоо: Бирге жана өзүңө гана бөлүнө турган натуралдык сан жөнөкөй сан деп аталат.

Мисалы: 19 саны жөнөкөй сан болот, себеби ал 1 ге жана 19 га гана бөлүнөт, б.а. анын эки гана бөлүүчүсү бар.

Аныктоо: Экиден ашык бөлүүчүсү бар натуралдык сан курама сан деп аталат.

Мисалы: 12 саны курама сан болот, себеби анын 1,2,3,4,6,12 деген 6 бөлүүчүсү бар.

Ал эми 1 натуралдык саны жөнөкөй да курама да сан эмес, себеби анын бир гана бөлүүчүсү бар.

Терс эмес бүтүн сандардын көптүгүндөгү бөлүнүүчүлүк катнаштыгы төмөнкү касиеттерге ээ болот:

1^0. Нөль саны ар кандай санга бөлүнөт, б.а. $(\forall a \in Z_0)\ 0 \vdots a$.

Чындыгында, ар кандай $a \in Z_0$ үчүн $0=0 \cdot a$ болот. себеби $0 \in Z_0$ болгондуктан бөлүнүүчүктүн аныктоосу боюнча $0 \vdots a$.

2^0. Нөлдөн айырмаланган бир дагы сан нөлгө бөлүнбөйт.

Б.а. $(\forall b \in Z_0)\ b \not\vdots 0$.

Айталы $b \neq 0$ болсун. $0 \cdot a=0$ болгондуктан $b=0 \cdot a$ барабардыгы a нын эч кандай маанисинде аткарылбайт. Демек, b саны 0 гө бөлүнбөйт.

3^0. Ар кандай сан бирге бөлүнөт. Б.а. $(\forall a \in Z_0)\ a \vdots 1$.

Чындыгында, ар кандай $a \in Z_0$ үчүн $a=1 \cdot a$ болгондуктан a саны 1 ге бөлүнөт.

4^0. Бөлүнүүчүлүк катнаштыгы рефлексивдүү, б.а. ар кандай сан өзүнө бөлүнөт. Б.а. $(\forall a \in Z_0)\ a \vdots a$. Чындыгында, ар кандай $a \in Z_0$ үчүн $a=a \cdot 1$. $1 \in Z_0$ болгондуктан, жогорудан $a \vdots a$ экендиги көрүнүп турат.

5^0. Эгер $a \vdots b$ жана $a>0$ болсо, анда $a \geq b$ болот.

Чындыгында, $a \vdots b$ болгондуктан $a=bc$ болгондой $c \in Z_0$ саны табылат. Ошондуктан $a-b=bc-b=b(c-1)$. Шарт боюнча $a>0$ болгондуктан $c>0$ болот. Z_0 көптүгүндө ар кандай оң сан бирден кичине эмес болгондуктан $c \geq 1$ болот.

Демек, $b(c-1) \geq 0$. Мындан $a-b \geq 0$ же $a \geq b$ болот.

6^0. Бөлүнүүчүлүк катнаштыгы антисимметриялуу:

$(\forall a,b \in Z_0)\ (a \vdots b \wedge b \vdots a) \Rightarrow (a=b)$

Далилдөө үчүн эки учурду карайбыз:

а) $a>0$, $b>0$ болсун. Анда 5-касиет боюнча $a \vdots b$ жана $b \vdots a$ болгондуктан $a \geq b$ жана $b \geq a$ 'экендиги келип чыгат. Булар $a=b$ болгондо гана туура болот. Мындан $a=b$.

б) a жана b сандарынын жок дегенде бир 0 болсун. Айталы $a=0$ болсун. Анда 2-касиет боючна $b=0$ болуш керек. Андай болбосо b саны a га бөлүнбөйт эле. Демек, бул учурда да $a=b$ болот.

7^0. Бөлүнүүчүлүк катнаштыгы транзитивдүү. Б.а. $a \vdots b$ жана $b \vdots c$ болсо, анда $a \vdots c$ болот:

$(\forall a,b,c \in Z_0)\ (a \vdots b \wedge b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c)$

Чындыгында, $a \vdots b$ дан $a=bk$ жана $b \vdots c$ дан $b=cl$ барабардыктары аткарыла тургандай k, l сандары табылат. Анда $a=bk=(cl)k=c \cdot (kl)$. kl көбөйтүндүсү бүтүн сан болгондуктан $a \vdots c$ экендиги келип чыгат.

8^0 Эгер сумманын ар бир кошулуучусу кандайдыр бир n натуралдык санына бөлүнсө, анда алардын суммасы да ошол санга бөлүнөт. б.а.

$$(\forall a,b\in Z_0,n\in N)\ (a\vdots n \wedge b\vdots n) \Rightarrow ((a+b)\vdots n)$$

Далилдөө: Шарт боюнча $a\vdots n$ жана $b\vdots n$ болгондуктан $a=nk$ жана $b=nl$ барабардыктары аткарыла турган k,l терс эмес бүтүн сандары табылат. Анда $a+b=nk+nl=n(k+l)$. $k+l$ суммасы да терс эмес бүтүн сан болгондуктан $(a+b)\vdots n$ болот.

Бул касиет кошулуучулардын саны экиден ашык болгондо да туура болот. б.а. $a_1\vdots n_1$, $a_2\vdots n_2,\ldots$, $a_m\vdots n$ болсо, анда $(a_1+a_2+\ldots+a_m)\vdots n$ болот.

9^0 Эгер $a\vdots n$, $b\vdots n$ жана $a\geq b$ болсо, анда $(a-b)\vdots n$ болот.

Бул касиет да жогорку 8-касиет сыяктуу эле далилденет.

10^0 Эгер көбөйтүлүүчүлөрдүн бири n натуралдык санына бөлүнсө, анда көбөйтүндү да ошол n санына бөлүнөт.

Далилдөө: $a\cdot b$ көбөйтүндүсү берилип $a\vdots n$ болсун. Анда $a=nq$ болгондой q терс эмес бүтүн саны табылат. Эки жагын тең b га көбөйтүп $a\cdot b=n(bq)$ болорун алабыз. bq терс эмес бүтүн сан болгондуктан акыркы барабардыктан $ab\vdots n$ болору ачык. Бул касиетти көбөйтүлүүчүлөрдүн саны экиден ашык болгон учур үчүн да оңой эле далилдөөгө болот.

Натыйжа: Эгер $a_1,a_2,\ldots,a_n$ сандары кандайдыр k санына бөлүнүшсө, анда $x_1,x_2,\ldots,x_n$ сандарынын кандай гана болушуна карабастан $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ суммасы да k санына бөлүнөт.

Далилдөөсү 9-жана 10-касиеттерден келип чыгат.

11^0 Эгер $ac\vdots bc$ жана $c\neq 0$ болсо, анда $a\vdots b$ болот.

Чындыгында, $ac\vdots bc$ болгондуктан $ac=(bc)k$ барабардыгы туура боло турган k саны табылат. Мындан $ac=(bk)\cdot c$ $c\neq 0$ экендигин эске алып, акыркы барабардыктан $a=bk$ экендигин же $a\vdots b$ болорун алабыз.

12^0 Эгер $a\cdot b$ көбөйтүндүсүндө $a\vdots m$ жана $b\vdots n$ $(m,n\in N)$ болсо, анда $ab\vdots mn$. Бул касиет 10-касиет сыяктуу эле далилденет.

Мисалы, $24\vdots 12$ жана $36\vdots 9$ болгондуктан $24\cdot 36$ көбөйтүндүсү $12\cdot 9$ көбөйтүндүсүнө бөлүнөт.

13^0 Эгер сумманын кандайдыр бир кошулуучусу m натуралдык санына бөлүнбөй, калган кошулуучулардын бардыгы ошол санга бөлүнсө, анда ал сумма m санына бөлүнбөйт.

Далилдөө: Берилсин $S=a_1+a_2+\ldots+a_n+c$ суммасы жана $a_1 \vdots m$, $a_2 \vdots m, \ldots,$ $a_n \vdots m$, $c \not\vdots m$. эсептелет болсун. Айталы S суммасы m санына бөлүнсүн. Жогорку барабардыктан

$C=S-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ экендиги келип чыгат. Анда $(a_1+a_2+\ldots+a_n) \vdots m$ жана $S \vdots m$ болгондуктан 9-касиет боюнча $C \vdots m$ болот. Бул шартка карама-каршы. Демек, $S \vdots m$ деген туура эмес. Б.а. $S \not\vdots m$.

2. Ондук эсептөө системасында сандардын бөлүнүүчүлүк белгилери.

Терс эмес бүтүн сандарды кемитүү жана бөлүү амалдары дайыма эле аткарыла бербегендиги белгилүү. Мисалы, 3 жана 7 сандарынын терс эмес бүтүн айырмасы жана тийиндиси жок. Бирок, a жана b сандарынын айырмасы бар болуш шарты– $a \geq b$ болушу жетиштүү болот. Ал эми алардын тийиндиси үчүн мындай белги жок.

Ушул сыяктуу эле бөлүү амалын аткарбастан, a санынын b санына бөлүнөрүн же бөлүнбөстүгүн, ал сандын (a нын) тигил же бул эсептөө системасындагы жазылышы боюнча аныктоого мүмкүнбү–деген суроо математиктерди илгертен бери эле кызыктырып келген. Мындай изилдөөлөр сандардын бөлүнүүчүлүк белгилерин гана эмес, алардын бир топ маанилүү касиеттерин ачууга мүмкүнчүлүк берген.

Аныктоо: a санына бөлүнүүчүлүктүн **белгиси** деп, бөлүү амалын аткарбастан туруп, ошол сандын берилген эсептөө системасындагы жазылышы боюнча, ал сандын a санына бөлүнөр же бөлүнбөстүгүн аныктоочу эреже аталат.

Ондук эсептөө системасында кээ бир сандарга болгон бөлүнүүчүлүк белгилерин карайбыз:

Теорема–1: (Сандардын 2 ге бөлүнүүчүлүк белгиси): x санынын 2 ге бөлүнүшү үчүн анын ондук жазылышындагы акыркы цифрасынын жуп сан (0,2,4,6,8) болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө:

а) Айталы $x=a_n \cdot 10^n+a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 10+a_0$ ондук жазылыштагы a_0 цифрасы жуп (0,2,4,6,8) сан болсун. Анда $a_0 \vdots 2$ (шарт боюнча) жана $(a_n \cdot 10^n+\ldots+a_1 \cdot 10) \vdots 2$ (себеби, $10 \vdots 2$, $10^2 \vdots 2$, $\ldots, 10^n \vdots 2$ жана сумманы санга бөлүү жөнүндөгү касиет боюнча) болгондуктан $x \vdots 2$.

б) Айталы x саны 2 ге бөлүнсүн. Анын акыркы цифрасы a_0 жуп сан экендигин далилдейбиз. $x=a_n \cdot 10^n+\ldots+a_1 \cdot 10+a_0$ барабардыгынан $a_0=x-(a_0 10^n+\ldots+a_1 \cdot 10)$

келип чыгары анык. Мында, $x \vdots 2$ (шарт боюнча) жана $(a_n \cdot 10^n+a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 10) \vdots 2$. Демек, айырманы санга бөлүү жөнүндөгү касиет боюнча $a_0 \vdots 2$. a_0 цифрасы 2 ге бөлүнүш үчүн ал жуп сан гана болушу керек.

Мисалы, $46758 \vdots 2$, себеби 8 жуп сан.

$46759 \not\vdots 2$, себеби 9 так сан.

Теорема–2: (Сандын 5 ке бөлүнүүчүлүк белгиси): x санынын 5 ке бөлүнүшү үчүн анын ондук жазылышындагы акыркы a_0 цифрасы 0 же 5 болушу зарыл жана жетиштүү.

Теореманын далилдөөсү жогорку теореманын далилдөөсүндөй эле жүргүзүлөт.

Мисалы, $56475 \vdots 5$, себеби $a_0=5$

$56470 \vdots 5$, себеби $a_0=0$

$56473 \not\vdots 5$, себеби $a_0=3$

Теорема–3: (Сандын 4 кө бөлүнүүчүлүк белгиси): x санынын 4 кө бөлүнүшү үчүн анын ондук жазылышындагы акыркы эки цифра (a_0 жана a_1) түзгөн сандын $\overline{a_1a_0}$ 4 кө бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө: а) $x=a_n \cdot 10^n+a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 10+a_0$ ондук жазылыштагы $a_1a_0=a_1 \cdot 10+a_0$ саны 4 кө бөлүнсүн. Анда берилген сумма да 4 кө бөлүнөт. Себеби, $100 \vdots 4$ болгондуктан $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2 \cdot 10^2) \vdots 4$.

б) x саны 4 кө бөлүнсүн. Анда a_1a_0 санынын да 4 кө бөлүнөрүн далилдейбиз. Ал үчүн берилген ажыратылыштан $\overline{a_1a_0}= =a_1 \cdot 10^n+a_0=x-(a_n \cdot 10^n +a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2 \cdot 10^2)$ барабардыгын алабыз. Анын оң жагындагы айырма 4 кө бөлүнөт. Себеби, кемиүүчү $x \vdots 4$ (шарт боюнча) жана кемитүүчү $(a_n \cdot 10^n +a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2 \cdot 10^2)$ да 4 кө бөлүнөт $(100 \vdots 4)$. Демек, $\overline{a_1a_0}=a_1 \cdot 10^n+a_0$ да 4 кө бөлүнөт.

Мисалы, $56416 \vdots 4$, себеби $16 \vdots 4$

$56419 \not\vdots 4$, себеби $19 \not\vdots 4$.

Ушул белги тигил же бул сандын 25 ке бөлүнүүчүлүк белгиси катарында да колдонулат.

Теорема–4: (Сандын 9 бөлүнүүчүлүк белгиси): х санынын 9 га бөлүнүшү үчүн сандын ондук жазылышындагы цифралардын суммасынын 9 га бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

Эң мурда 10^n-1 айырмасынын 9 га бөлүнүшүн далилдейли. Чындыгында, жөнөкөй өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп $10^n-1= =(9\cdot10^{n-1}+10^{n-1})-1= (9\cdot10^{n-1}+9\cdot10^{n-2}+10^{n-2})-1= (9\cdot10^{n-1}+9\cdot10^{n-2}+\ldots+ +10)-1$ $= 9\cdot10^{n-1}+9\cdot10^{n-2}+\ldots+9$ туюнтмасын алабыз. Мында ар бир кошулуучу 9 га бөлүнгөндүктөн 10^n-1 айрымасы да 9 га бөлүнөт.

Эми берилген теореманы далилдейбиз.

а) $x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0$ жазылыштагы $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ цифралардын суммасы 9 га бөлүнсүн. Б.а. $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$ болсун. Ал үчүн жогорку жазылышка $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)$ суммасын кошуп жана кемитебиз. Анда $x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)-(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)=$

$=(a_n\cdot10^n-a_n)+(a_{n-1}\cdot10^{n-1}-a_{n-1})+\ldots+(a_1\cdot10+a_1)+(a_0-a_0)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+$ $+a_1+a_0)=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)$.

Акыркы суммада

$a_n(10^n-1)\vdots 9$, себеби $(10^n-1)\vdots 9$

$a_{n-1}(10^{n-1}-1)\vdots 9$, себеби $(10^{n-1}-1)\vdots 9$

……………………………………

$a_1(10-1)\vdots 9$, себеби $(10-1)$ $\vdots 9$ жана шарт боюнча $(a_n+$ $+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$. Демек, $x\vdots 9$.

б) Эми тескерисинче, $x\vdots 9$, болсо анда $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$ экендигин далилдейбиз. Ал үчүн эң акыркы барабардыкты төмөнкүчө өзгөртүп жазабыз:

$a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0=x-(a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1))$. Мында $x\vdots 9$ жана $((a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)))\vdots 9$ болгондуктан $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0)\vdots 9$ болот.

Мисалы, $45171\vdots 9$, себеби $4+5+1+7+1=18\vdots 9$

$54172\not\vdots 9$, себеби $4+5+1+7+2=19\not\vdots 9$

Ушул эле теорема сандын үчкө бөлүнүүчүлүк белгиси боло тургандыгын далилдөөгө болот.

3. Башка позициялык эсептөө системасында бөлүнүүчүлүк белгилери.

Негизи р болгон позициялык эсептөө системасы берилсин. Эгерде р саны кандайдыр бир а санына бөлүнсө, анда $p^2,p^3,\ldots, p^n$ даражалары да ошол санга бөлүнөрү анык.

Көбөйтүндүнүн жана сумманын бөлүнүүчүлүгү жөнүндөгү касиеттердин негизинде $x_n p^n+x_{n-1}p^{n-1}+\ldots+x_1 p$ туюнтмасы да а га бөлүнөт.

Демек, эгер р саны а га бөлүнсө жана х санынын негизи р болгон эсептөө системасындагы жазылышы
$x=x_n p^n+x_{n-1}p^{n-1}+\ldots+x_0$
болсо, анда x_0 саны а га бөлүнгөндө гана х саны а санына бөлүнөт.
Мисалы, он экилик эсептөө системасындагы сандын акыркы цифрасы (биринчи разряды) 0,3,6,9 болгондо гана ал сан 3 кө бөлүнөт. Себеби, $12 \vdots 3$

Негизи р болгон эсептөө системасында сандардын р-1 санына болгон бөлүнүүчүлүк белгисин келтирип чыгарабыз.
Төмөнкү формуладан
$p^n-1=(p-1)(p^{n-1}+ p^{n-2}+\ldots+1)$ ар кандай n саны үчүн p^n-1 айырмасы $p-1$ санына бөлүнөрү көрүнүп турат. х санынын р эсептөө системасындагы жазылышын
$x=[x_n(p^n-1)+\ldots+x_1(p-1)]+(x_n+\ldots+x_1+x_0)$
түрүндө жазып алууга болот.

Мындагы биринчи сумма $p-1$ санына бөлүнгөндүктөн, х санынын $p-1$ ге бөлүнүшү үчүн, анын р негиздүү эсептөө системасындагы жазылышынын цифраларынын суммасы $p-1$ ге бөлүнүш керек.
Мисалы, 7214_8 саны 7 ге $(8-1)$ бөлүнөт. Себеби $7+2+1+4=16_8=14_{10}$ саны 7 ге бөлүнөт.

4. Эң чоң жалпы бөлүүчү жана эң кичине жалпы бөлүнүүчү.

Аныктоо: a жана b натуралдык сандарынын жалпы бөлүүчүсү деп, ал сандардын ар бири бөлүнө турган натуралдык сан аталат.
Мисалы, 12 жана 8 сандарынын жалпы бөлүүчүлөрү болуп 1, 2, 4 сандары эсептелет.

Аныктоо: a жана b натуралдык сандарынын **эң чоң жалпы бөлүүчүсү** деп жалпы бөлүүчүлөрдүн эң чоңу аталат жана D(a,b) деп белгиленет.
Мисалы, D(12,8)=4, D(7,5)=1
Сандардын эң чоң жалпы бөлүүчүсүнүн төмөнкү касиеттерин далилдөөсүз кабыл алабыз:

1^0. а жана b натуралдык сандардын эң чоң жалпы бөлүүчүсү дайыма бар жана бирөө гана.

2^0. а жана b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү берилген сандардын кичинесинен ашпайт. Б.а. $a<b$ болсо, анда $D(a,b)\le a$.

3^0. а жана b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү ал сандардын каалаган жалпы бөлүүчүсүнө бөлүнөт.

Аныктоо: а жана b натуралдык сандарынын жалпы бөлүнүүчүсү деп алардын ар бирине бөлүнө турган сан аталат.

Мисалы, 12 жана 8 сандарынын жалпы бөлүнүүчүлөрү: 24, 48, 72, 96, …

Аныктоо: а жана b натуралдык сандарынын **эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү** деп жалпы бөлүнүүчүлөрдүн эң кичинеси аталат жана $K(a,b)$ деп белгиленет.

Мисалы, $K(12,8)=24$, $K(50,25)=50$

Бул түшүнүктүн да төмөнкү касиеттерин карап көрөлү:

1^0. а жана b натуралдык сандарынын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү дайыма бар жана бирөө гана.

2^0. а жана b натуралдык сандарынын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү алардын чоңунан кичине эмес. Б.а. эгер $a>b$ болсо, анда $K(a,b)\ge a$.

3^0. а жана b натуралдык сандарынын ар кандай жалпы бөлүнүүчүсү алардын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүнө бөлүнөт.

Чындыгында, айталы m саны а жана b сандарынын жалпы бөлүнүүчүсү жана $K(a,b)=k$ болсун. m ди k га калдыктуу бөлүп, $m=kq+r$ барабардыгын алабыз. Мындагы калдыктын (r) нөлгө барабар экендигин далилдөө керек болот.

Жогоркудан, m жана k сандары а га бөлүнгөндүктөн $r=m-kq$ да а га бөлүнөрү келип чыгат.

Ошондой эле m жана k нын b га бөлүнөрүнөн r дин да b га бөлүнөөрү келип чыгат. Демек, r саны а га да b га да бөлүнөт. Эгер $r\neq 0$ болсо, анда ал а жана b га жалпы бөлүнүүчү болмок. Анда 2-касиет боюнча $r\ge k$ болмок. Бирок, мындай болууга мүмкүн эмес, себеби калдык бөлүүчүдөн кичине болуш керек. Демек, $r=0$ болот. б.а. $m=kq$ же m саны k га бөлүнөт.

4^0. Эгер $K(a,b)=k$ болсо, анда ар кандай с натуралдык саны үчүн $K(ac,bc)=kc$ болот.

Чындыгында, эгер k саны а га бөлүнсө, анда kc көбөйтүндүсү ac га бөлүнөт. Ошондой эле kc да bc га бөлүнөт. Демек, kc саны ac жана bc үчүн жалпы бөлүнүүчү экендигин далилдейбиз.

Айталы $l<kc$ жана l ac га жана bc га бөлүнсүн. Анда $l:c<kc:c=k$, бирок мында $e:c$ тийиндиси a га да b га да бөлүнөт. Бул k саны жана b сандарынын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү экендигине каршы келет. Демек, $kc=K(ac,bc)$.

Аныктоо: Эгер a жан b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү бирге барабар болсо б.а. $D(a,b)=1$ болсо, анда алар өз ара жөнөкөй сандар деп аталышат.

Мисалы, 9 жана 5 сандары өз ара жөнөкөй сандар, себеби $D(9,5)=1$

5. Эң чоң жалпы бөлүүчү жана эң кичине жалпы бөлүнүүчүнүн касиеттери.

1^0 Эгер c саны a жана b сандарынын жалпы бөлүүчүсү болсо (б.а. $a=a_1c$ жана $b=b_1c$ болсо), анда $e=\frac{ab}{c}$ саны a жана b сандарыны жалпы бөлүнүүчүсү болот.

Далилдөө керек: l саны a га жана b га бөлүнө тургандыгын. Жогорку шарттарды эске алып $l=\frac{a_1cb_1}{c}\cdot c=a_1b_1c=b_1(a_1c)=b_1a$ болорун алабыз.

Мындан $l\vdots a$ экендиги көрүнүп турат.

Экинчиден $l=a_1b_1c=a_1(b_1c)=a_1b$ болгондуктан $l\vdots b$. Демек, l саны a жана b үчүн жалпы бөлүнүүчү болот.

2^0 $d=\frac{ab}{k}$, мында $k=K(a,b)$ саны a жана b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү болот.

Чындыгында, k саны b га бөлүнөт, демек ak саны ab га бөлүнөт.

$d=\frac{ab}{k}$ болгондуктан $ab=dk$, демек ak саны dk га бөлүнөт. Мындан a саны d га бөлүнө тургандыгы келип чыгат. Ошондой эле b нын d га бөлүнө тургандыгын далилдөөгө болот. Демек, d саны a жана b сандарынын жалпы бөлүүчүсү. Эми анын эң чоң жалпы бөлүүчү экендигин далилдейбиз. Айталы d дан чоң болгон a жана b сандарынын жалпы бөлүүчүсү болгон c саны бар болсун. анда 1-касиет боюнча $l=\frac{ab}{c}$ саны a жана b сандарынын жалпы бөлүнүүчүсү болот.

$c>d$ болгондуктан $l=\frac{ab}{c}<\frac{ab}{d}=k$. Б.а. a жана b сандарынын жалпы бөлүнүүчүсү L, алардын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү болгон k дан кичине. Мындай болуу мүмкүн эмес. Демек, d дан чоң болгон жалпы с деген бөлүүчү бар болсун дегенибиз туура эмес. Б.а. D(a,b)=d

Натыйжалар:

1) a жана b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү менен эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүнүн көбөйтүндүсү ал сандардын көбөйтүндүсүнө барабар. Б.а.

$$D(a,b)\cdot K(a,b)=\frac{ab}{k}\cdot k=ab$$

2) Эгер сандар өз ара жөнөкөй болушса б.а. D(a,b)=1 болсо, анда K(a,b)=ab

3^0. a жана b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү d, алардын каалаган жалпы бөлүүчүсүнө бөлүнөт.

Чындыгында, $a \vdots c$ жана $b \vdots c$ болсун. Анда 1-касиет боюнча $\frac{ab}{c}$ саны a жана b сандары үчүн жалпы бөлүүчү болот, демек ал $k=\frac{ab}{d}$ санына бөлүнөт. Б.а. $\frac{ab}{c}=\frac{ab}{d}\cdot m$ болот. Мындан dab=abcm же d=cm б.а. d саны с га бөлүнөт.

4^0. Эгер a жана b натуралдык сандарынын көбөйтүндүсү ab кандайдыр бир m натуралдык санына бөлүнсө жана D(a,m)=1 болсо b саны m ге бөлүнөт.

Далилдөө: ab көбөйтүндүсү a га жана m ге бөлүнгөндүктөн a жана m үчүн жалпы бөлүнүүчү болот. Демек, ал a менен m дин эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү k=K(a,m) ге бөлүнөт. Бирок, a жана m өз ара жөнөкөй болгондуктан k=am болот. Демек, ab көбөйтүндүсү am ге бөлүнөт, мындан b саны m ге бөлүнүшү келип чыгат.

5^0. Эгер a натуралдык саны өз ара жөнөкөй болгон b жана c сандарынын ар бирине бөлүнсө, анда ал сан алардын көбөйтүндүсүнө да бөлүнөт.

Далилдөө: a саны b жана c сандарынын ар бирине бөлүнгөндүктөн ал b жана c үчүн жалпы бөлүнүүчү болот. Ошондуктан ал K(b,c) га да бөлүнөт. Бирок, b жана c өз ара жөнөкөй болгондуктан K(b,c)=bc. Демек, a саны bc га бөлүнөт.

Акыркы касиет өз ара жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсү болгон айкым курама сандарга бөлүнүүчүлүк белгилерин келтирип чыгарууга мүмкүнчүлүк берет

Мисалы:

х натуралдык саны 6 га бөлүнүш үчүн анын 2 ге жана 3 кө бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

Чындыгында, эгер х саны 6 га бөлүнсө, анда ал 2 ге да 3 кө да бөлүнөт. Себеби $6=3\cdot 2$. Тескерисинче, х саны 2 ге жана 3 кө бөлүнсүн. Анда 2 жана 3 сандары өз ара жөнөкөй болгондуктан х саны алардын көбөйтүндүсү $2\cdot 3=6$ га бөлүнөт.

Жогоркудай эле төмөнкү айтылыштарды далилдөөгө болот:

1) х саны 12 ге бөлүнүш үчүн анын 3 кө жана 4 кө бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

2) х саны 15 бөлүнүш үчүн анын 3 кө жана 5 ке бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

3) х саны 18 бөлүнүшү үчүн анын 2 ге жана 9 га бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

6. Жөнөкөй сандар жана алардын касиеттери.

Аныктоо: Бирден чоң болгон жана эки гана бөлүүчүгө ээ болгон натуралдык сан **жөнөкөй сан** деп аталат.

Мисалы, 7 саны жөнөкөй сан, себеби ал 1 ге жана 7 ге гана бөлүнөт. 15 саны жөнөкөй сан эмес, себеби анын бөлүүчүлөрүнүн (1,3,5,15) саны төртөө.

Аныктоо: Экиден ашык бөлүүчүгө ээ болгон натуралдык сан **курама сан** деп аталат.

Мисалы, 6,10,25,80 сандары курама сандар. Ошентип, терс эмес бүтүн сандардын көптүгү элементтеринин бөлүүчүлөрүнүн санына жараша төрт класска бөлүнөт:

1-класс– Бир гана бөлүүчүгө ээ болгон 1 санын кармап турат;

2-класс– Чексиз бөлүүчүгө ээ болгон 0 санын кармап турат;

3-класс– Экиден гана бөлүүчүлөрү бар жөнөкөй сандардан турат;

4-класс– Экиден көп бөлүүчүлөрү бар курама сандардан турат (0 дөн башка!)

Жөнөкөй сандар төмөнкү негизги касиеттерге ээ:

1^0 Эгер р жөнөкөй саны бирден башка кандайдыр бир n натуралдык санына бөлүнсө, анда $p=n$. Чындыгында, эгерде $p\neq n$ болгондо ал р саны үч бөлүүчүгө (1,p,n) ээ болмок. Бул учурда ал жөнөкөй сан болмок эмес.

2^0 Эгерде p жана q эки башка жөнөкөй сандар болсо, анда p саны q га бөлүнбөйт.

Далилдөө: p жөнөкөй сан болгондуктан ал 1 ге жана өзүнө гана бөлүнөт. Бирок, шарт боюнча $p \neq q$ жана q да жөнөкөй сан, демек ал бирге барабар эмес. Б.а. q саны p нын бөлүүчүсү эмес.

Мисалы, 19 жана 7 сандары жөнөкөй сандар. Ошондуктан $19 \not\vdots 7$

3^0 Эгер a натуралдык саны p жөнөкөй санына бөлүнбөсө, анда a жана p өз ара жөнөкөй.

Далилдөө: Айталы d саны a жана p сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү болсун. Анда p саны d га бөлүнөт. Бирок, p жөнөкөй болгондуктан эки гана бөлүүчүгө ээ. Ошондуктан же $d=1$ же $d=p$.

Эгер $d=p$ болсо, анда шартка каршы болуп, a саны p га бөлүнмөк. Демек, бир гана $d=1$ учуру болушу мүмкүн. Ошондуктан $D(a,p)=1$

4^0 Эгер a жана b натуралдык сандарынын көбөйтүндүсү p жөнөкөй санына бөлүнсө, анда алардын жок дегенде бири p га бөлүнөт.

Далилдөө: Айталы a саны p га бөлүнбөйт. Анда 3-касиет боюнча алар өз ара жөнөкөй. Бирок, мурдагы параграф боюнча, эгер ab көбөйтүндүсү p га бөлүнсө жана a, p өз ара жөнөкөй болсо, анда b саны p га бөлүнөт.

Мисалы, 25 жана 69 сандарынын көбөйтүндүсү 1725 саны 5 ке бөлүнөт. Бирок, $69 \not\vdots 5$. Ошондуктан $25 \vdots 5$.

Бул сүйлөм p саны курама сан болгондо туура эмес. Мисалы, $8 \cdot 9=72$ саны 12 ге бөлүнгөнү менен көбөйтүүчүлөрдүн эч бири ал санга бөлүнбөйт.

5^0 Эгер натуралдык сан бирден чоң болсо, анда ал жок дегенде бир жөнөкөй бөлүүчүгө ээ.

Далилдөө: Айталы, бир дагы жөнөкөй бөлүүчүгө ээ болбогон жана бирден чоң болгон натуралдык сан бар болсун. Анда аталган сандарды кармап турган A көптүгүндө эң кичине сан болуш керек. Ал сан a болсун. A көптүгүндөгү бардык сандар бирден чоң болгондуктан a саны же жөнөкөй же курама сан болуш керек. Бул A көптүгүнө тиешелүү болуп, бир да жөнөкөй бөлүүчүгө ээ болбогондуктан жөнөкөй сан эмес.

Ошондой эле a саны курама сан да эмес. Эгер курама сан болгондо 1 ден жана a дан башка b деген натуралдык бөлүүчүгө ээ болмок. Анда ал бөлүүчү a дан кичине болуп, A көптүгүнө тиешелүү болмок эмес. Себеби, A көптүгүндөгү эң кичине сан a болгон. Демек, b санынын р деген жөнөкөй **бөлүүчүсү**. Анда а саны да, коюлган шартка каршы, р жөнөкөй санына бөлүнмөк. Бул карама-каршылык аталган касиеттин туура экендигин көрсөтөт.

6^0. а курама санынын эң кичине жөнөкөй бөлүүчүсү $\sqrt{a}$ дан чоң эмес.

Далилдөө: Шарт боюнча а саны курама, ал эми р анын эң кичине жөнөкөй бөлүүчүсү болгондуктан $a=pb$ болот. Мында $p\leq b$. Эгер мындай болбосо b санынын жөнөкөй бөлүүчүсү р дан кичине болмок, демек а саны да р дан кичине болгон жөнөкөй бөлүүчүлөргө ээ болмок. $p\leq b$ барабарсыздыгынын эки жагын тең р га көбөйтүп $p^2\leq pb=a$ экендигин алабыз. Б.а. $p^2\leq a$ же $p\leq\sqrt{a}$ болот.

7. Эратосфендин торчосу.

Жөнөкөй сандардын таблицасын түзүү жана алардын катарында белгилүү бир закон ченемдүүлүктү табуу проблемасы математиктерди байыркы замандан бери эле түйшүккө салып келген.

Алардын бири болуп биздин эрага чейин III кылымда Александрияда жашаган байыркы грек математиги жана астроному **Эратосфен** болгон. Анын таблица түзүүдөгү ыкмасы эң жөнөкөй гана– натуралдык сандардын катарынан белгилүү бир эле эреженин негизинде сандарды сызып таштоо болгон. Тагыраак айтканда ал 2 ден n ге чейинки натуралдык сандарды жазып, эң мурда 2 ге, андан кийин 3 кө, 5 ке, 7 ке, … жөнөкөй сандарына бөлүнө турган сандарды катардан сызып таштаган. Натыйжада 2 ден n ге чейинки жөнөкөй сандар гана калган.

Мисалы, 2 ден 30 га чейинки сандардын катарынан Эратосфендин ыкмасы менен жөнөкөй сандардын катарын (таблицасын) түзөлү:

Эң мурда 2 ге бөлүнө турган сандарды сызып таштайбыз:

$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17,$

$\cancel{18}, 19, \cancel{20}, 21, \cancel{22}, 23, \cancel{24}, 25, \cancel{26}, 27, \cancel{28}, 29, \cancel{30}$

Калган сандардын катарында 3 кө бөлүнө тургандарын (3 төн башка) сызабыз:

$2, 3, 5, 7, \cancel{9}, 11, 13, \cancel{15}, 17, 19, \cancel{21}, 23, 25, \cancel{27}, 29$

Калган катардан 5 ке бөлүнө турган сандарды (бештен башка) сызабыз:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cancel{25}, 29$

Ошентип, удаалаш сызуу менен төмөнкү жөнөкөй сандардын катары (таблицасы) пайда болот:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Байыркы гректер кагаздын ордуна сагыз (воско) шыбалган жыгач тактайчасын пайдаланып, сызуунун ордуна сандар турган жерди күйгүзүп, оюп коюшкан. Натыйжада тактайчада жалаң гана жөнөкөй сандар калып, тешикчелери бар торчо пайда болуп калган. Ошол себептүү, жөнөкөй сандардын таблицасын жогоркудай ыкма менен түзүү илимдё Эратосфендин торчо методу деп аталып келет. Ушундай ыкма менен каалаган санга чейинки жөнөкөй сандардын таблицасын түзүүгө болот.

Эгерде 1000000 го чейинки жөнөкөй сандардын таблицасын түзсөк, анда биринчи калган сан $\sqrt{1000000}=1000$ ден чейин сызуу керек. Бирок, Эратосфендин торчо методу жөнөкөй сандардын көптүгүнүн чектелген же чектелген эмес экендиги жөнүндө жооп бере албайт. Бул суроого биздин эрага чейинки III кылымда ошол эле Александрияда жашаган улуу грек математиги Евклид жооп берген:

Теорема: Жөнөкөй сандардын көптүгү чексиз.

Далилдөө: Теореманы тескери ыкма менен далилдейбиз б.а. жөнөкөй сандардын көптүгү чектүү көптүк болсун. Алардын катары. $p_1,p_2,\ldots,p_n$ болсун. Ал жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө бирди кошуп $a=p_1p_2\cdots p_n+1$ санын пайда кылабыз. Бул сан же жөнөкөй же курама болуш керек.

a жөнөкөй сан эмес, себеби ал p_1, p_2 ,..., p_n жөнөкөй сандарынан чоң жана биздин койгон шарт боюнча p_1, $p_2\ldots$, p_n дерден башка жөнөкөй сан жок.

Ошондой эле a саны курама сан эмес. Эгер курама сан болгондо жок дегенде бир жөнөкөй бөлүүчүгө ээ болуш керек. Ал $p_1,p_2,\ldots,p_n$ жөнөкөй сандарынын эч кайсынысына бөлүнбөйт (Алардын каалаганына бөлгөндө бир деген калдык калат). Демек, келип чыккан карама-каршылык жөнөкөй сандардын көптүгү чектелген болсун деген шарттын туура эместигин далилдейт.

Ошондуктан, жөнөкөй сандардын көптүгү чексиз көптүк болот.

8. Натуралдык сандардын арифметикасынын негизги теоремасы.

Практикада айрым математикалык операцияларды аткарууда натуралдык сандарды жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө ажыратууга туура келет.

Мисалы, $120=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$, $140=2\cdot2\cdot5\cdot7$

Ошондуктан, ар кандай курама санды жогорудай көбөйтүндүгө ажыратууга болобу, эгер ажыратууга мүмкүн болсо канча түрдүү жол менен ажыратылат деген суроо пайда болот.

Бул суроого натуралдык сандардын арифметикасынын негизги теоремасы жооп берет.

Теорема: Ар кандай курама сан бир гана жол менен жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсү түрүндө туюкталат.

Далилдөө: Эң мурда мындай ажыратуу бар экендигин далилдейбиз.

Тескерисинче, жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө ажыратууга мүмкүн болбогон курама сандар бар болсун. Анда мындай сандардын көптүгү A да эң кичине a саны бар болот. A көптүгүндөгү бардык сандар курама сан болгондуктан a саны да курама сан болот. Ошондуктан аны эки сандын көбөйтүндүсү түрүндө жазууга болот б.а. $a=a_1\cdot a_2$, мында $a_1<a$ жана $a_2<a$. a_1 жана a_2 сандары a дан кичине болгондуктан алар A көптүгүнө тиешелүү эмес (себеби, a саны A көптүгүндөгү эң кичине сан). Ошондуктан алар, же жөнөкөй сандар, же жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө ажырашат б.а. $a_1=p_1\ p_2\dots\ p_m$, $a_2=q_1\ q_2\dots q_t$. Мында $p_1,p_2,\dots,p_m$, $q_1,q_2,\dots,q_t$ сандары жөнөкөй сандар.

Анда $a=a_1a_2=p_1p_2\dots p_m\ q_1\ q_2\dots q_t$ болот

Б.а. a саны жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө ажыратылды– бул биздин шартка карама-каршы келет. Демек, жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө ар кандай курама санды ажыратууга мүмкүн.

Эми мындай ажыратуу бир маанилүү экендигин, б.а. курама сандын жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө, эки түрдүү ажыратылса, анда жөнөкөй көбөйтүүчүлөр көбөйтүндүдөгү тартиби менен гана айырмаланышын далилдейбиз.

Айталы, жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө эки түрдүү жол менен ажырай турган натуралдык сандар бар болсун. алардын көптүгүн A деп белгилейбиз. Шарт боюнча A бош эмес көптүк болгондуктан анда эң кичине a саны бар болуп, төмөнкүдөй жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө эки түрдүү жол менен ажырасын: $a=p_1\cdot p_2\cdot\dots p_m$ жана $a=q_1\cdot q_2\cdot\dots q_t$. Анда буларды салыштырып. $p_1\cdot p_2\cdot\dots p_m=q_1\cdot q_2\cdot\dots q_t$ экендигин алабыз. Бул барабардыктын оң жагы q_1 ге бөлүнөт, ошол себептүү анын сол жагы да q_1 ге бөлүнүш керек. Анда жогорудагы пункттарга негизделип $p_1,p_2,\dots,p_m$ дердин жок дегенде бири q_1 ге бөлүнөт. Айталы q_1 ге p_1 жөнөкөй саны бөлүнсүн. Анда $p_1=q_1$ болот. барабардыктын эки жагын тең $p_1=q_1$ ге кыскартып.

$c=p_2\dots p_m=q_2\dots q_t$, мында $c=a:p_1$, $p_1>1$ болгондуктан $c<a$ болот. Бирок, шарт боюнча a–жөнөкөй көбөйтүлүүчүлөргө ажырай

тургандардын эң кичинеси. Ошондуктан с саны жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө бир гана жол менен ажырайт. Демек, $c=p_2,\ldots,p_m$ жана $c=q_{2,}\ldots,q_t$ ажыратылыштары бири-биринен көбөйтүлүүчүлөрдүн тартиби менен гана айырмаланышы мүмкүн. Анда $p_1=q_1$ болгондуктан

$a=p_2,\ldots,p_m$ жана $a=q_{2,}\ldots,q_t$ ажыратылыштары да бири-биринен көбөйтүлүүчүлөрдүн тартиби менен айырмаланышат.

Мындай корутунду жогорудагы биз койгон шарттын- натуралдык сандардын арасында эки түрдүү жол менен жөнөкөй сандардын көбөйтүндүсүнө ажыратууга боло тургандыгы туура эмес.

Демек, теорема далилденди.

Практикада натуралдык сандын ажыратылышындагы жөнөкөй көбөйтүлүүчүлөр чоңоюу тартибинде жазылат. Эгер алардын арасында кайталануучулары болсо, анда аларды көбөйтүп, даража түрүндө жазышат. Мисалы, $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$.

Сандардын мындай ажыратылып жазылышы анын каноникалык ажыратылышы деп аталат.

9. Жөнөкөй көбөйтүлүүчүлөргө ажыратуу жолу менен натуралдык сандардын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн жана эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүн табуу.

Бөлүнүүчүлүк катнаштыгынын касиеттерине таянып, эки же андан ашык натуралдык сандардын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн жана эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүн, алардын каноникалык ажыратылышын пайдаланып табууга болот.

Эгерде а жана b натуралдык сандары берилсе, анда алардын эң чоң жалпы бөлүүчүсү алардын каноникалык ажыратылышындагы даражалардын көптүктөрүнүн кесилишиндеги көбөйтүндү, ал эми эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү– биригүүсүндөгү көбөйтүндү болот.

Мисалы, 3600 жана 288 сандары берилсе, алардын каноникалык көрүнүштөрү

$3600=2^4\cdot3^2\cdot5^2$ жана $288=2^5\cdot3^2$ болот.

Анда $D(3600,288)=2^4\cdot3^2=144$

$K(3600,288)=2^5\cdot3^2\cdot5^2=7200$

Эгер 60,252 жана 264 сандары берилсе, бул учурда да алардын каноникалык ажыратылышын жазабыз:

$60=2^2\cdot3\cdot5$

$252=2^2\cdot3^2\cdot7$

$264=2^3\cdot3\cdot11$

Анда жогорку сыяктуу эле

$D(60,252,264)=2^2\cdot3=12$

$K(60,252,264)=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11=27720$ болорун табууга болот.

10. Евклиддин алгоритмасы.

Эки сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн табуу аларды каноникалык түргө келтирүү аркылуу гана эмес бөлүү амалын аткаруу аркылуу да мүмкүн. Себеби, чоң сандарды көбөйтүлүүчүлөргө ажыратуу бир топ кыйынчылыктарга алып келет. Мисалы, 6815 санын ажыратууда биринчи бөлүүчүнү (5 ти) оңой эле табууга болот. ал эми экинчи жөнөкөй бөлүүчүнү (29 ду) табуу үчүн 1363 санын 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 сандарына бөлүп көрүүгө туура келет.

Сунуш кылынган ыкма **Евклиддин алгоритмасы** деп аталып, төмөнкү үч сүйлөмгө негизделген:

1) Эгер a саны b га бөлүнсө, анда $D(a,b)=b$. Чындыгында $a \vdots b$ жана $b \vdots b$ болгондуктан b саны a жана b сандарынын жалпы бөлүүчүсү болот. Бирок, b нын ар кандай бөлүүчүсү өзүнөн ашпайт. Ошондуктан, a жана b сандарынын бардык жалпы бөлүүчүлөрү b дан чоң эмес. Демек, $D(a,b)=b$ болот.
2) Эгер $a=bq+r$ жана $a\neq0$, $b\neq0$, $r\neq0$ болсо, анда a жана b нын жалпы бөлүүчүлөрүнөн көптүгү b жана r дин жалпы бөлүүчүлөрүнүн көптүгү менен дал келет.

Чындыгында, d саны b жана r дин жалпы бөлүүчүсү болсун. Анда b менен r сандары d га бөлүнгөндүктөн $a=bq+r$ да d га бөлүнөт. Демек, b менен r дин ар кандай жалпы бөлүүчүсү b менен a нын да жалпы бөлүүчүсү болот.

Тескерисинче, эгер d саны a менен b нын жалпы бөлүүчүсү болсо, анда d саны $r=a-bq$ нын да бөлүүчүсү болот. Демек, a менен b нын ар кандай жалпы бөлүүчүсү b менен r дин да жалпы бөлүүчүсү болот.

Ошентип, a менен b нын b менен r дин жалпы бөлүүчүлөрүнүн көптүктөрү дал келишет.

3) Эгер $a=bq+r$ жана $a\neq0$, $b\neq0$, $r\neq0$ болсо, анда $D(a,b)=D(b,r)$ болот.

Чындыгында, жогорку сүйлөм боюнча a менен b нын жана b менен r дин жалпы бөлүүчүлөрүнүн көптүктөрү дал келгендиктен, ал көптүктөрдүн экөө тең бир эле эң чоң элементке ээ болушат. Б.а. $D(a,b)=D(b,r)$.

Эми Евклиддин алгоритмасына токтолобуз: a жана b натуралдык сандары берилип, $a\geq b$ болсун.

Эгер a саны b га калдыксыз бөлүнсө, анда (1) пункт боюнча $D(a,b)=b$ болот.

Эгер $a=bq+r$ болсо, анда (3) пункт боюнча $D(a,b)=D(b,r)$ болот. Мында b саны r ге калдыксыз бөлүнсө, анда $D(a,b)=D(b,r)=r$ болот.

Эгер b санын r ге бөлгөндө r_1 калдык калса, анда $D(a,b)=D(b,r)=D(r,r_1)$ болот.

Бул процессти улантуу менен улам кичинерип бараткан калдыктардын $r,r_1,r_2,\ldots,r_m$ удаалаштыгын алабыз. Кандайдыр бир n чи кадамдан кийин мурдагы калдык бөлүнө турган калдыкты табабыз. Ошол акыркы нөл эмес калдык изделүүчү эң чоң жалпы бөлүүчү болот. б.а. $r_n=0$ болсо $D(a,b)=r_{n-1}$ болот.

Мисалы, $7975=2585\cdot3+220$

$2585=220\cdot11+165$

$220=165\cdot1+55$

$165=55\cdot3+0$

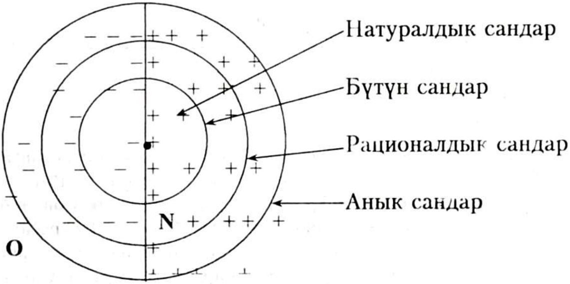
Демек, $D(2585,7975)=D(2585,220)=D(220,165)=D(165,55)=55$

Евклиддин алгоритмасын пайдаланып, төмөнкү сүйлөмдү далилдөөгө болот:

Ар кандай a жана b натуралдык сандары үчүн $D(a,b)=ax-by$ барабардыгы аткарыла тургандай x жана y натуралдык сандары

VIII ГЛАВА
Сан түшүнүгүн кеңейтүү.

Мектеп курсунан нөль жана натуралдык сандардан башка дагы бүтүн, рационалдык, иррационалдык жана анык сандардын бар экендиги белгилүү. Аталган сан көптүктөрүнүн байланышын Эйлер-Венндин тегеректелери менен төмөнкүчө көрсөтүүгө болот:



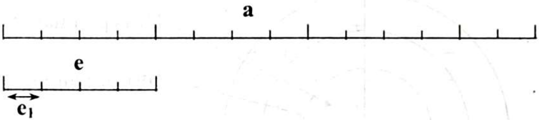
Сан түшүнүгүнүн эң алгачкысы болуп натуралдык сандардын көптүгү N={1,2,3,4,...} эсептелет. Бул сандар байыркы мезгилде эле пайда болушуп, көптөгөн кылымдар бою кеңейтүүгө жана жалпылануууга дуушар болушкан. Мисалы, чоңдуктарды тагыраак ченөө зарылчылыгы оң бөлчөк сандарынын пайда болушуна алып келген. Айрым теңдемелерди чыгаруу жана теориялык изилдөөлөр терс сандарды киргизүүнү талап кылды. Нөль санын киргизүү менен бүтүн жана рационалдык сандардын көптүктөрү пайда болду. Биздин эрага чейин V кылымда эле Пифагор тарабынан кесиндилерди ченөө үчүн оң рационалдык сандардын жетишсиздиги айтылган. Кийинчерээк бул проблеманы чечүү иррационалдык сандарды пайда кылды, ал эми XVI кылымда ондук бөлчөктөрдүн пайда болушу анык сандар түшүнүгүн пайда кылды. Анык сандардын так аныктоосу жана анын касиеттери XIX кылымда гана такталды.

Сан түшүнүгүн кеңейтүү ушуну менен гана токтоп калбайт. Математиканын жана башка илимдердин өнүгүшү комплекстүү, гиперкомплекстүү ж.б. сандарды кийирүүнү талап кылат.

1. Оң рационалдык сандар.

Бөлчөктөрдүн пайда болуу тарыхы, жогоруда айтылгандай, чоңдуктарды ченөө менен байланышкан. Мисал катары алардын кесиндинин узундугун ченөө учурунда кантип пайда болорун карап көрөлү.

Айталы, а кесиндиси берилсин. Анын узундугун табуу үчүн узундуктун бирдиги катары е кесиндисин тандап алабыз. Ченөө учурунда анын узундугу 3е ден чоң, бирок 4е ден кичине болуп калды.



Демек, берилген а кесиндисинин узундугу, тандалып алынган узундуктун е бирдигинде, натуралдык сан менен туюнтулбайт.

Эгер е кесиндисин ар бири e_1 ге барабар болгон 4 бөлүккө бөлсөк, анда а кесиндисинин узундугу 14 e_1 ге барабар болот. Мурдагы узундук бирдиги е ге кайрылсак, анда а кесиндисинин узундугу е кесиндисинин төрттөн бир бөлүгүнүн 14үнө барабар экендиги көрүнүп турат. Мындай жагдайда а кесиндисинин узундугун $\frac{14}{4}e$ түрүндө жазышат да $\frac{14}{4}$ символун бөлчөк деп аташат. Жалпылап айтканда, бөлчөк түшүнүгүн төмөнкүчө аныкташат: а кесиндиси, бирдик кесинди е берилсин жана $e=ne_1$ болсун. Эгер а кесиндиси ар бири e_1ге барабар болгон m кесиндиден турса, анда а кесиндисинин узундугу $\frac{m}{n}e$ түрүндө туюнтулат. $\frac{m}{n}$ символу бөлчөк деп аталат. Мында $m,n\in N$. Окулушу “n ден m”.

а кесиндисин е нин төрттөн бир бөлүгү менен гана эмес сегизден бири, он алтыдан бири, ж.б. менен да ченөөгө болот. Анда анын узундугу $\frac{28}{8}e$, $\frac{56}{16}e$, жб.лар менен туюнтулат.

Демек, а кесиндисинин узундугу төмөнкү сыяктуу ар түрдүү бөлчөктөрдүн чексиз көптүгү менен туюнтулат: $\frac{14}{4}, \frac{28}{8}, \frac{56}{16}, \ldots$

Жалпысынан, эгер e узундук бирдигинде a кесиндисинин узундугу $\frac{m}{n}$ бөлчөгү менен туюнтулса, анда анын узундугу $\frac{mk}{nk}$ түрүндө ар кандай бөлчөк менен туюнтулат. Мында k∈N.

Аныктоо: e узундук бирдигинде, бир эле кесиндинин узундугун туюнткан бөлчөктөр, барабар бөлчөктөр деп аталышат жана $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ деп жазылат.

Жогорку мисалда $\frac{14}{4}$, $\frac{28}{8}$, $\frac{56}{16}$ бөлчөктөрү бир эле a кесиндисинин узундугун туюнткандыктан $\frac{14}{4}=\frac{28}{8}=\frac{56}{16}$ болот.

Теорема (бөлчөктөрдүн барабардык белгиси): $\frac{m}{n}$ жана $\frac{p}{q}$ **бөлчөктөрү барабар болуш үчүн mq=np болушу зарыл жана жетиштүү.**

Далилдөө:

1) $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ болсун. Анда ар кандай натуралдык сан q үчүн $\frac{m}{n}=\frac{mq}{qn}$ жана ар кандай натуралдык n үчүн $\frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}$ болгондуктан, жогорку шартты эске алып $\frac{mq}{qn}=\frac{pn}{qn}$ экендиги келип чыгат. Мындан mq=np

2) mq=np болсун. Анын эки жагын тең nq натуралдык санына бөлсөк, $\frac{mq}{qn}=\frac{pn}{qn}$ келип чыгат. Мындан $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ болот.

Мисалы: $\frac{3}{7}$ жана $\frac{4}{5}$ бөлчөктөрүнүн барабардыгын же барабар эместигин текшерүү үчүн 3 5 жана 7 4 көбөйтүндүлөрүн салыштырабыз. 3 5≠7 4, ошондуктан 3/7≠4/5.

Жогорку теоремадан бөлчөктүн төмөнкү негизги касиети келип чыгат:

> Эгер бөлүмүн жана алымын бир эле натуралдык санга көбөйтсө же бөлсө, анда пайда болгон бөлчөк берилген бөлчөккө барабар болот.

Ал эми бул негизги касиеттен бөлчөктү кыскартуу жана бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү эрежелери келип чыгат.

Аныктоо: Бөлчөктү кыскартуу деп аны берилген бөлчөккө барабар, бирок алымы жана бөлүмү аныкынан кичине болгон экинчи бир бөлчөк менен алмаштыруу аталат. Алымы жана бөлүмү өз ара жөнөкөй болгон бөлчөк **кыскарбас** бөлчөк деп аталат.

Мисалы: $\frac{5}{7}$ бөлчөгү кыскарбас, себеби Д(5,7)=1. Бөлчөктөрдү кыскартууда кыскарбас бөлчөк калыш керек.

Мисалы, $\frac{48}{80}$ бөлчөгүн кыскартуу үчүн анын алымын жана бөлүмүн Д(48,80)=16 га бөлүү керек. Б.а. $\frac{48}{80}=\frac{48:16}{80:16}=\frac{3}{5}$ – бул кыскарбас.

Аныктоо: Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү деп аларды бөлүмдөрү бирдей болгон өздөрүнө барабар бөлчөктөр менен алмаштыруу аталат.

Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүүдө алардын бөлүмдөрүнүн жалпы бөлүнүүчүсүн, көбүнчө эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүн табышат. Мисалы, $\frac{8}{15}$ жана $\frac{4}{35}$ бөлчөктөрүн жалпы бөлүмгө келтирүү үчүн К(15,35)=105 ти таап, аны мурдагы бөлүмдөргө бөлүү менен ар бир бөлчөктүн кошумча көбөйтүүчүлөрү табылат: 105:15=7, 105:35=3. Берилген бөлчөктөрдү тиешелүү сандарга көбөйтүп, изделүүчү (жалпы бөлүмдүү) бөлчөктөрдү алабыз. Б.а.

$$\frac{8}{15}=\frac{8\cdot 7}{15\cdot 7}=\frac{56}{105}; \qquad \frac{4}{35}=\frac{4\cdot 3}{35\cdot 3}=\frac{12}{105}$$

Жогоруда бир эле кесиндиге, берилген узундук бирдигинде, барабар бөлчөктөрдүн чексиз көптүгү туура келээрин такталган. Бирок, кесиндинин узундугу бир эле сан менен туюнтулушу керек. Ошондуктан барабар бөлчөктөрдү бир эле сандын түрдүүчө жазылышы деп эсептеп, ал санды оң рационалдык сан деп аташат.

> Б.а. барабар бөлчөктөрдүн көптүгү **оң рационалдык сан** деп аталат. Ал көптүктөгү ар бир бөлчөк ал сандын жазылышы болот. Мисалы, $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{14}{21}, \ldots\}$ көптүгү кандайдыр бир оң рационалдык сан болот, ал эми $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \ldots$ бөлчөктөрү ал сандын

түрдүүчө жазылыштары болуп эсептелет. Берилген оң рационалдык санды аныктаган бөлчөк үчүн, көбүнчө анын жазылышындагы кыскарбас бөлчөктү алышат. Ал бөлчөк берилген сан үчүн калган бөлчөктөрдүн өкүлү катарында колдонулат.

Ошондуктан, практикада $\frac{m}{n}$ түрүндөгү жазылыш учураса, аны «$\frac{m}{n}$ бөлчөгү» же «$\frac{m}{n}$ бөлчөгү түрүндө жазылган оң рационалдык сан» деп түшүнүү жана окуу керек (туурасы). Бирок, кээде жогорку фразаны кыскартып «$\frac{m}{n}$ оң рационалдык саны берилди» деп да айтышат.

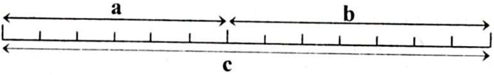
Демек, бөлчөк жана оң рационалдык сан түшүнүктөрүнүн маанилери бирдей деп түшүнүүгө болбойт.

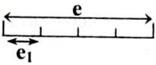
Ар кандай m натуралдык санын $m \cdot \frac{n}{n}$ түрүндө жазууга мүмкүн болгондуктан ($n \in N$), натуралдык сандардын көптүгү N оң рационалдык сандардын көптүгүнө камтылат деп айтууга болот. Б.а. $N \subset Q+$. Демек, бардык натуралдык сандар оң рационалдык сандардын көптүгүнө тиешелүү.

Натуралдык сандардын көптүгүн оң рационалдык сандардын көптүгүнө чейин толуктоочу көптүк– оң бөлчөк сандарынын көптүгү болот.

2. Оң рационалдык сандарды кошуу.

$c=a+b$ болгондой жана тандалып алынган е узундук бирдигинде $a=\frac{6}{4}e$, $b=\frac{7}{4}e$ болгон a, b жана c кесиндилери берилсин.





Анда $c=a+b=\frac{6}{4}e+\frac{7}{4}e=6e_1+7e_1=(6+7)e_1=13e_1=\frac{13}{4}e$

Демек, с кесиндисинин узундугу $\frac{13}{4}$ саны аркылуу туюнтулду. Бул сан $\frac{6}{4}$ жана $\frac{7}{4}$ сандарынын суммасы катарында эсептелет.

Аныктоо: Эгер a жана b оң рационалдык сандары $\frac{m}{n}$ жана $\frac{p}{n}$ бөлчөктөрү аркылуу туюнтулса, анда a жана b сандарынын суммасы деп $\frac{m+n}{n}$ саны аталат. б.а.

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}; \quad (1)$$

Мисалы, $\frac{6}{4}+\frac{7}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=\frac{12}{12}=1$

Эгер a жана b сандарынын бөлүмдөрү ар башка болсо, анда аларды жогорку эреже боюнча жалпы бөлүмгө келтирүү керек.

Мисалы: 1) $\frac{5}{12}+\frac{2}{15}=\frac{25}{60}+\frac{8}{60}=\frac{33}{60}=\frac{11}{30}$

2) $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}=\frac{mq+np}{nq}$

Ар кандай оң рационалдык сандардын суммасы дайыма бар болушун жана жалгыз экендигин далилдөөсүз кабыл алса болот.

Оң рационалдык сандарды кошуу операциясы **коммутативдүү, ассоциативдүү жана кыскаруучулук** касиетине ээ. б.а. Q_+ көптүгүнөн алынган ар кандай a, b, c сандары үчүн

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) $a+c=b+c$ болсо, анда $a=b$
4) $a+b\neq a$

Бул касиеттердин биринчисин далилдейбиз: Айталы $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$ болсун. Анда сумманын аныктоосу боюнча

$$a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+n}{n}$$ болот

m жана n сандары натуралдык сандар болгондуктан m+p=p+m. Анда

$$a+b=\frac{m+p}{n}=\frac{p+m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{m}{n}=b+a$$ болот

Калган касиеттер да ушул сыяктуу эле далилденет.

Практикада бөлчөктөр **дурус** жана **буруш** бөлчөктөр болуп бөлүнүшөт. Эгер $\frac{m}{n}$ бөлчөгү берилип m<n болсо– дурус, m≥n болсо– буруш бөлчөк болот.

Эгер $\frac{m}{n}$ бөлчөгүндө m саны n ге эселүү болсо, анда $\frac{m}{n}$ бөлчөгү натуралдык сан болот. Мисалы, $\frac{27}{9}=3$. Эгерде m саны n ге эселүү болбосо, анда m=nq+r болот. Б.а.

$$\frac{m}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n};$$

Мында r<n болгондуктан $\frac{r}{n}$ бөлчөгү дурс бөлчөк. Демек, $\frac{m}{n}$ бөлчөгү натуралдык сан менен дурус бөлчөктүн суммасы түрүндө жазылды. Бул операция– буруш бөлчөктүн бүтүн бөлүгүн бөлүп алуу болот. Мисалы,

$$\frac{23}{5}=\frac{5\cdot4+3}{5}=\frac{5\cdot4}{5}+\frac{3}{5}=4+\frac{3}{5};$$

Акыркы сумманы «плюс» белгиси жок $4\frac{3}{5}$ түрүндө жазып, **аралаш сан же аралаш бөлчөк** деп аташат.

Бул операцияны тескери аткарууга да болот. Б.а.

$$4\frac{3}{5}=4+\frac{3}{5}=\frac{5\cdot4+3}{5}=\frac{23}{5};$$

Бул аралаш санды буруш бөлчөккө айландыруу эрежеси.

Оң рационалдык сандардын көптүгүндө «чоң» же «кичине» катнаштыктары бар болот. б.а. $a,b\in Q_+$ сандары үчүн a=b+c барабардыгы аткарыла тургандай $c\in Q_+$ саны табылса, анда a>b болот.

Бул катнаштык симметриялуу эмес, транзитивдүү жана сызыктуу. Эгер a жана b сандары $\frac{p}{n}$ жана $\frac{t}{n}$ бөлчөктөрү менен туюнтулса, анда p>t болгондо гана a>b болот. Эгер алар $\frac{p}{n}$ жана $\frac{t}{n}$ бөлчөктөрү менен туюнтулушса, анда pn>nt болгондо гана a>b б.а. $\frac{p}{n} > \frac{t}{n}$ болот.

Оң рационалдык сандардын көптүгүндөгү иреттүүлүк катнаштыгы, натуралдык сандардын көптүгүндөгүнөн айырмаланып, төмөнкү эки касиетке ээ:

1) Оң рационалдык сандардын көптүгүндө эң кичине сан жок.
2) Оң рационалдык сандардын көптүгүндө каалаган эки a жана b сандарынын ортосунда ошол эле көптүккө тиешелүү болгон чексиз сандар табылат.

Бул касиеттерди далилдейбиз:

Q_+ көптүгүнөн кандайдыр a санын алсак, анын бөлчөк түрүндө жазылышы $\frac{p}{n}$ болсун. Анда $\frac{p}{2n}$<a болот.

Эми ар кандай эки a жана b оң рационалдык сандарын алабыз. Мында a<b болсун. Аларды бөлчөк түрүндө $\frac{m}{n}$ жана $\frac{p}{n}$ деп туюнтабыз. a<b болгондуктан m<p болот.

$c=\frac{m+p}{2n}$ болгондой c санын тандап алабыз. m<p болгондуктан 2m<m+p<2p болот. Ошондуктан $\frac{2m}{2n} < \frac{m+p}{2n} < \frac{2p}{2n}$, б.а. a<c<b. Демек, a жана b сандарынын ортосунда c саны табылды.

Ушундай эле жол менен a жана c, c жана b нын ортосунан эки сан табууга болот. Бул процессти улантып, a жана b сандарынын ортосунан Q_+ көптүгүнө тиешелүү болгон чексиз сан табууга болот.

Ошондой эле Q_+ көптүгүндө эң чоң сан жок экендигине да ишенүүгө болот. Чындыгында, эгер $a=\frac{p}{n}$ саны эң чоң рационалдык сан болсун десек, анда $\frac{p+1}{n}$ саны андан да чоң болот.

3. Кемитүү.

Аныктоо: a жана b оң рационалдык сандарынын айырмасы деп, a=b+c барабардыгы аткарыла тургандай c саны аталат.

Алардын айырмасын кантип табуу эрежесин келтирип чыгарабыз:

Айталы $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{n}$ болсун, эгер алардын айырмасы $\frac{x}{n}$ болсо, анда жогорку аныктоо боюнча

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{x}{n}=\frac{p+x}{n} \text{ болот.}$$

Мындан m=p+x экендиги келип чыгат. m жана p сандары натуралдык сан болгондуктан x=m-p болот. Демек,

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n};$$

Кошуу сыяктуу эле рационалдык сандардын жазылышындагы бөлүмдөрү ар түрдүү болсо, аларды кемитүү үчүн да жалпы бөлүмгө келтирүү керек.

Мисалы: 1) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$

2) $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{mq-np}{nq}$

4. Көбөйтүү жана бөлүү.

Аныктоо: Эгер a жана b оң рационалдык сандар $\frac{m}{n}$ жана $\frac{p}{q}$ бөлчөктөрү түрүндө туюнтулса, анда алардын көбөйтүндүсү деп $\frac{mp}{nq}$ бөлчөгү аталат. б.а. $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$

Оң рационалдык сандарды көбөйтүү амалы орун алмаштыруу, топтоштуруу жана кошуу амалына карата бөлүштүрүүчүлүк касиеттерине ээ болот. Алардын туура экендиги кошуу амалынын касиеттериндей эле далилденет.

Аныктоо: a жана b оң рационалдык сандарынын тийиндиси деп a=bc барабардыгы аткарыла тургандай c саны атала

Эгерде $a=\frac{m}{n}$ жана $b=\frac{p}{q}$ болсо, анда $c=\frac{mq}{np}$ болорун далилдейбиз. Чындыгында, тийиндинин аныктоосу боюнча

$$a=bc=\frac{p}{q}\cdot\frac{mq}{np}=\frac{p(mq)}{q(np)}=\frac{(pq)m}{(pq)n}=\frac{m}{n}$$

Демек, эки оң рационалдык сандардын тийиндиси

$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}$ формуласы аркылуу табылат.

Бул формуладан ар кандай эки оң рационалдык сандардын тийиндиси дайыма бар болору көрүнүп турат. Ал эми натуралдык сандардын көптүгүндө мындай айтууга болбойт эле.

$\frac{m}{n}$ жазылышындагы сызыкча бөлүү амалынын белгиси (:) катарында, жана тескерисинче кароого боло тургандыгын көрсөтүүгө болот. б.а.

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{n}$$

же тескерисинче

$$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=m:n$$

Демек, $\frac{m}{n}=m:n$

(«Рационалдык сан» деген термин латындын Ratio деген сөзүнөн келип чыккан. Анын кыргызча котормосу «катыш» (тийинди) болот).

5. Оң рационалдык сандардын ондук бөлчөк түрүндө жазылышы.

Жогоруда айтылгандай бөлчөк түрүндө туюнтулган оң рационалдык сандарды салыштыруу үчүн аларды бирдей бөлүмгө келтирүү керек. Ошондой эле практикада көпчүлүк эсептөөлөр ондук эсептөө системасында жүргүзүлөт жана бирдиктердин метрдин системасындагы өз ара катнаштыктары негизинен 10, 100, 1000, ... сандары түзөт.

Мисалы, 1км =1000м =100000см= 1000000мм. 1 т.= 1000 кг=1000000 г. Ошондуктан, илимде жана практикада бөлүмү 10^n $(n\in N)$ болгон бөлчөктөр өзгөчө мааниге ээ болушат.

Аныктоо: Бөлүмдөрү 10, 100, 1000, ..., 10^n ($n \in N$) болгон бөлчөктөр **ондук бөлчөктөр** деп аталышат.

Мисалы: $\frac{3}{10}, \frac{35}{100}, \frac{45}{1000}, \frac{123}{1000}, \ldots, \frac{m}{10^n}$

Эгер $m = \overline{m_k m_{k-1} \ldots m_0}$ болсо, анда анын ондук жазылышы $m = m_k \cdot 10^k + \ldots + m_0$ болот. $n \leq k$ болгондо

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + \ldots + m_n \cdot 10^n + m_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + m_0}{10^n} = m_k \cdot 10^{k-n} + \ldots +$$

$$+ m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{m_0}{10^n};$$

$m_k \cdot 10^{k-n} + \ldots + m_n$ натуралдык санын M деп белгилесек, акыркы сумманы төмөнкүчө жазууга болот: $\frac{m}{10^n} = M, \overline{m_{n-1} \ldots m_0}$.

Демек, $\frac{m}{10^n}$ санынын жазылышында m санынын акыркы n цифрасы үтүр менен бөлүп коюлат. Мисалы, $\frac{31}{10} = 3.1$, $\frac{475}{100} = 4.75$, $\frac{4573}{100} = 45.73$.

Эгер алымында n ден аз ондук белги болсо, анда ал n+1 орундуу сан болгондой кылып m дин алдында нөлдөр жазылат. Мисалы,

$$\frac{32}{1000} = \frac{0032}{1000} = \frac{0032}{10^3} = 0.032;$$

$$\frac{32}{10000} = \frac{00032}{10000} = \frac{00032}{10^4} = 0.0032;$$

Бөлүмдөрү 10^n болбогон бөлчөктөрдү **жөнөкөй бөлчөктөр** деп аташат.

Мисалы, $\frac{1}{2}, \frac{17}{3}, \frac{43}{127}, \ldots$

Бардык эле рационалдык сандарды ондук бөлчөк түрүндө жазууга болобу?

Теорема: $\frac{m}{n}$ рационалдык саны ондук бөлчөк түрүндө жазылышы (сүрөттөлүшү) үчүн анын бөлүмү 2 жана 5 жөнөкөй сандарынын гана көбөйтүндүсүнө ажыралышы зарыл, жана жетиштүү.

Далилдөө: а) Зарыл шарт болушу. Айталы r рационалдык санын туюнтуучу $\frac{m}{n}$ кыскарбас бөлчөгүнүн (n≠1) 2 жана 5 тен башка жөнөкөй бөлүүчүлөрү жок болсун. Анда аны $n=2^k \cdot 5^e$ түрүндө жазып алууга болот. Мында $k,e \in N$ же алардын бири нөль болушу мүмкүн жана $k \neq e$. Эгер $к=е$ болсо, анда бөлүм 10^t түрүндө болуп калат. $k>e$ болсун, бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн 5^{k-e}ге көбөйтүп $\frac{m \cdot 5^{k-e}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{m \cdot 5^{k-e}}{10^k}$ бөлчөгүн алабыз. Эгерде $k<e$ болгондо 2^{e-k} га көбөйтүп $\frac{m \cdot 2^{e-k}}{2^e \cdot 5^e} = \frac{m \cdot 2^{e-k}}{10^e}$ бөлчөгүн алмакпыз. Пайда болгон бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү 10^t түрүндө, демек $\frac{m}{n}$ саны ондук бөлчөк түрүнө келтирилди.

Мисалы: $\frac{13}{80} = \frac{13}{2^4 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{1625}{10^4} = 0.1625$

б) Жетиштүү шартын далилдейбиз. Айталы r рационалдык саны $\frac{m}{10^k}$ түрүндөгү ондук бөлчөк менен туюнтулсун. Эгер кыскартууга мүмкүн болсо аны кыскартып, кыскарбас бөлчөккө келтиребиз. Кыскартуудан кийин анын бөлүмү 2 жана 5 тен башка бөлүүчүгө ээ болбойт. Себеби, кыскартууга чейин анын бөлүмү $10^k=2^k \cdot 5^k$ болгон.

Бул теореманын зарыл шартын далилдөө менен рационалдык санды сүрөттөөчү ондук бөлчөктү кантип табуу жолун көрсөттүк. Б.а.

$$\frac{17}{20} = \frac{17}{2^2 \cdot 5} = \frac{17 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{85}{10^2} = \frac{85}{100} = 0.85$$

$$\frac{7}{250} = \frac{7}{2 \cdot 5^3} = \frac{7 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{28}{10^3} = \frac{28}{1000} = 0.028$$

Мындай өзгөртүп түзүүнүн практикалык дагы бир жолу–$\frac{m}{n}$ бөлчөгүнүн алымын анын бөлүмүнө бөлүү ыкмасы. Б.а.

```
_170 |20
 160 |0.85
 _100
  100
    0
```

```
_700 |250
 500 |0.028
_2000
 2000
    0
```

6. Чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктөр.

Эгер $\frac{m}{n}$ бөлгөчүнүн бөлүмүн 2 жана 5 тен башка да жөнөкөй бөлүүчүлөрү бар болсо, анда ал бөлчөктү жогорку бөлчөктөр сыяктуу чектүү ондук бөлчөк түрүндө жазууга болбойт. Мисалы $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{55}$ бөлчөктөрүндө алымдарын тиешелүү бөлүмдөрүнө бөлүү менен төмөнкүдөй чексиз ондук бөлчөктөрдү алабыз:

$$\frac{1}{3}=0.333\ldots,\ \frac{8}{55}=0.14545\ldots,\ \frac{6}{7}=0.857142857142857\ldots$$

Бул мисалдардан пайда болгон чексиз ондук бөлчөктөрдө бир цифра же бир нече цифралардын группасы кайталангандыгы көрүнүп турат. Сандын ондук жазылышындагы үтүрдөн кийинки кайталанган цифра же бир нече цифралардын группасы берилген чексиз ондук бөлчөктүн **мезгили** деп аталат. Ал эми мындай бөлчөктөр чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктөр деп аталышат. Алардын жазылышы:

$$\frac{1}{3}=0.(3),\ \frac{8}{55}=0.1(45),\ \frac{6}{7}=0.(857142)$$

6.а. тегерек кашаага ондук бөлчөктүн мезгили жазылат.

Мезгилдин пайда болушу төмөнкүчө түшүндүрүлөт: Айталы $a=\frac{m}{n}$ санын чексиз ондук бөлчөккө айландыруу керек болсун. Ал үчүн m ди n ге бөлөбүз. Мында n санынан кичине болгон 0, 1, 2, …, n-1 калдыктар келип чыгат. Эгер калдыктардын жок дегенде бири нөль болсо, анда чектүү ондук бөлчөк келип чыгат. Эгер бардык калдыктар нөлдөн айырмаланган болсо, анда бөлүү процесси чексизге чейин улана берет. Бирок, ар түрдүү калдыктардын саны чектелген болгондуктан, белгилүү бир кадамда калдык кайталанат. Демек, тийиндидеги цифралар да кайталана баштайт.

Чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктөр **таза** жана **аралаш** мезгилдүү болуп эки түрдүү болушат.

Эгер ондук бөлчөктүн мезгили үтүрдөн кийин эле башталса таза мезгилдүү болот. Эгер үтүр менен мезгилдин ортосунда башка да ондук белгилер бар болсо– аралаш мезгилдүү болот. Мисалы,

$$\frac{1}{3}=0.(3)\text{– таза мезгилдүү,}$$

$$\frac{8}{55}=0.1(45)\text{– аралаш мезгилдүү.}$$

Эгер кыскарбас бөлчөктүн бөлүмү 2 жана 5 сандарына бөлүнбөсө, анда ал бөлчөк таза мезгилдүү, эгер 2 ге же 5 ке бөлүнсө аралаш мезгилдүү ондук келип чыгат.

Чектүү ондук бөлчөктөрдү да артына нөлдөрдү жазуу менен мезгили нөль саны болгон чексиз мезгилдүү ондук бөлчөк түрүндө жазууга болот. Мисалы, 43,17=43,17000...=43,17(0).

Жогорку айтылгандарды жыйынтыктап, төмөнкү корутундуга келебиз:

> Ар кандай оң рационалдык санды чексиз мезгилдүү ондук бөлчөк түрүндө жазууга болот.

Ошондой эле бул сүйлөмдүн тескериси да туура. б.а.

> Ар кандай чексиз мезгилдүү ондук бөлчөк тигил же бул оң рационалдык санды берет.

Акыркы проблема б.а. чексиз мезгилдүү, ондук бөлчөктөрдү жөнөкөй бөлчөктөргө айландыруу практикада кандай чечилерин карап көрөлү.

1) a=0,(28)=0,2828... таза мезгилдүү ондук бөлчөгү берилсин. Эки жагын тең 100гө көбөйтүп

   100a=28,2828... же

   100a=28+0,2828...= 28+a

   теңдемесин алабыз. Аны чыгарып, $a=\frac{28}{99}$ кыскарбас жөнөкөй бөлчөгүн алабыз.

Демек, таза мезгилдүү чексиз ондук бөлчөктү жөнөкөй бөлчөккө айландыруу үчүн алымына мезгилиндеги санды жазып, бөлүмүнө мезгилде канча ондук орун болсо ошондо тогуздан турган санды жазуу керек.

Мисалы: $0,(625)=\frac{625}{999}$, $12,(1378)=12\frac{1378}{9999}$;

2) 0,86161..=0,8(61) аралаш мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк берилсин. Бул санды a деп белгилеп, эки жагын тең 10 го көбөйтөбүз (себеби үтүр менен мезгилге чейинки сан бир орундуу. Эгерде эки орундуу болсо 100гө, үч орундуу болсо 1000ге, ж.б. көбөйтмөкпүз). Б.а.
$a=0,8161\ldots$
$10a=8,6161\ldots$

Пайда болгон бөлчөк таза мезгилдүү болгондуктан жогорку пункттагыдай эле өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз. б.а. $x=8,6161\ldots$ деп алып, эки жагын тең 100гө көбөйтөбүз. Анда $100x=861,6161\ldots$ же $100x=861+0,6161\ldots$ Акыркы барабардыктын эки жагына тең 8 ди кошуп $100x+8=861+8,6161\ldots$ же $x=8,6161\ldots$ болгондуктан $100x+8=861+x$.

Пайда болгон теңдемени чыгарып $99x=861\text{-}8$ же $x=\frac{861-8}{99}$ болорун табабыз. $x=10a$ болгондуктан $10x=\frac{861-8}{99}$ же $x=\frac{853}{990}$ болот.

Демек, аралаш мезгилдүү чексиз ондук бөлчөктү жөнөкөй бөлчөккө айландыруу үчүн алымына экинчи мезгилге чейинки сандан биринчи мезгилге чейинки сандын айырмасын (861-8), ал эми бөлүмүнө мезгилде канча ондук орун болсо ошончо тогуз жана анын артына үтүрдөн биринчи мезгилге чейин канча ондук болсо, ошончо нөлдү (990) жазуу керек.

Мисалы: $0,1(25)=\frac{125-1}{990}=\frac{124}{990}$

$$6,31(8)=6\frac{318-31}{900}=6\frac{287}{900}$$

$$15,43(29)=15\frac{4329-43}{9900}=15\frac{4286}{9900}$$

Жогорудагыларды жыйынтыктап, төмөнкүдөй корутунду чыгарууга болот:

> Ар кандай рационалдык санды бир гана чексиз мезгилдүү ондук бөлчөк түрүндө жазууга болот жана тескерисинче, ар кандай чексиз мезгилдүү ондук бөлчөк бир гана рационалдык санды туюнтат.

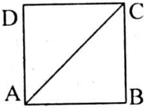
7. Оң анык сандар.

Практикада кесиндилерди ченөө үчүн рационалдык сандардын жетишсиз экендиги б.а. бардык эле кесиндилердин узундугу рационалдык сан менен туюнтулбаган учурлары да кездешет.

Бул сүйлөмдүн чын экендигин төмөнкү теорема ырастайт.

Теорема: Квадраттын диагоналы анын жагы менен ченелбейт.

Далилдөө: Жагы бирге барабар болгон ABCD квадраты берилсин. Далилдөөнү тескерисинче болсун деп жүргүзөбүз. б.а. квадраттын диагоналы анын жагы менен ченелип, $\frac{p}{q}$ кыскарбас бөлчөгү менен туюнтулсун. Чиймеден Пифагордун теоремасы боюнча $|AB|^2+|BC|^2+|AC|^2$ болгондуктан $\frac{p^2}{q^2}=2$ же $p^2=2q^2$ экендиги келип чыгат. Мындан p^2 саны жуп, демек p саны да жуп экендиги көрүнүп турат. Айталы $p=2p_1$ болсун. Акыркы барабардыкка ордуна коюу менен $4p_1^2=2q^2$ же $q^2=2p_1^2$ экендигин алабыз. Мындан q саны да жуп экендиги келип чыгат.



Демек, $\frac{p}{q}$ бөлчөгү кыскаруучу бөлчөк болот. Бул анын кыскарбас бөлчөк экендигине карама-каршы келет. Ошол себепт жагы бирге барабар болгон квадраттын диагоналы анын жагы менен ченелбейт, б.а. бул квадраттын диагоналынын узундугу рационалдык сан менен туюнтулбайт. Ушундай эле катеттери е жана 2е, 2е жана 3е, ж.б. болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын узундугу да рационалдык сан менен туюнтулбасын далилдөөгө болот. Же, рационалдык сандардын көптүгүндө төмөнкүдөй маселе да чечилбейт: бардык эле натуралдык (жана рационалдык) сан үчүн квадраты ошол натуралдык (рационалдык) санга барабар болгон рационалдык сан жок.

Демек, математикадагы жогорку сыяктуу проблемаларды чечүү үчүн бизге белгилүү болгон, рационалдык сандардын көптүгүн да кеңейтүүгө (толуктоого) туура келет.

Мектеп курсунан белгилүү болгон эреже аркылуу 2, 3 жана 5 жөнөкөй сандарынан квадраттык тамыр чыгарып, пайда болгон ондук бөлчөктөрдүн мезгилсиз экендигин байкайбыз. Б.а.

$$\sqrt{2}=1,41421337...$$

$\sqrt{3}$ =1,7320508…

$\sqrt{5}$ =2,236067…

Демек, бул сандар рационалдык эмес сандар.

Аныктоо: Чексиз мезгилсиз ондук бөлчөктөр иррационалдык сандар деп аталышат. Рационалдык жана иррационалдык сандар анык же чыныгы сандар деп аталат. б.а. $Q \cup I = R$ же $Q_+ \cup I_+ = R_+$

8. Оң анык сандардын жакындатылган маанилери жана аларды салыштыруу.

Ар кандай оң анык сан үчүн анын жакындатылган маанисин көрсөтүүгө болот. Алардын жакындаштырылган маанилери **кеми менен жана ашыгы менен** болушат.

x оң анык санын $\frac{1}{10^k}$ тактыкка чейин кеми менен тегеректөө үчүн ал сандын бүтүн бөлүгүн жана үтүрдөн кийинки k ондук орундарды калтырып, калгандарын таштап коюу керек. Кеми менен алынган мааниси x_k деп белгиленет. Б.а. эгер $x=n,n_1n_2 \ldots n_k\ n_{k+1}\ldots$ болсо, анда $x_k=n,n_1n_2 \ldots n_k$ болот. Бул санга $\frac{1}{10^k}$ санын кошуу менен ал сандын ашыгы менен алынган x'_k маанисин алабыз. Б.а.

$$x'_k = n,n_1n_2 \ldots n_k + \frac{1}{10^k};$$

Эгер n_k цифрасы 9 дан башка цифра болсо, анда x'_k санын алуу үчүн n_k ны бирге чоңойтуп коюу жетиштүү.

Мисалы: x=4,7128356… анык саны берилсе, анда анын $\frac{1}{10^3}$ тактыгы менен алынган кеми жана ашыгы менен алынган маанилери x_3=4,712 жана x_3^1=4,713 болот. Ар кандай x оң анык саны үчүн $x_k \leq x < x'_k$ экендиги анык.

R_+ көптүгүндө $x=m,m_1m_2 \ldots m_k\ldots$

$y= n,n_1n_2 \ldots n_k\ldots$

оң анык сандары берилсин.

Эгер $m=n$, $m_1=n_1, \ldots, m_{k-1}=n_{k-1}$ болуп, бирок $m_k<n_k$ боло тургандай k саны табылса же $m<n$ болсо, анда $x<y$ болот. «Кичине» катнаштыгы R_+ көптүгүндө сызыктуу катуу тартиптеги катнаштык

болорун б.а. ал ассимметриялуу, транзитивдүү жана x≠y болсо же x<y же x>y болорун оңой эле текшерүүгө болот. R_+ көптүгүндө эң кичине жана эң чоң элемент жок. Ошондой эле R_+ көптүгүнүн ар кандай эки элементинин ортосунда чексиз көп рационалдык сандар табылат.

9. Оң анык сандарды кошуу жана көбөйтүү.

Аныктоо: x жана y оң анык сандарынын суммасы деп

$$x_k+y_k \le x+y < x'_k + y'_k$$

шартын канааттандыруучу x+y саны аталат.

Мисалы: $x=\sqrt{2}=1,4142137\ldots$

$y=\sqrt{3}=1,7320508\ldots$ сандарынын суммасын 0,001 тактыкта табабыз. Ал үчүн ал сандардын кеми жана ашыгы менен алынган маанилерин табабыз. б.а.

$x_k=1,4142$ $x'_k=1,4143$

$y_k=1,7320$ $y'_k=1,7321$

Анда $3,1462 \le \sqrt{2}+\sqrt{3} < 3,1464$, ал эми $\sqrt{2}+\sqrt{3}=3,146\ldots$ болот. Демек, 0,001 тактык менен берилген сандардын суммасы $\sqrt{2}+\sqrt{3}=3,146$.

R_+ көптүгүндө кошуу операциясы коммутативдүү, ассоциативдүү жана кыскаруучу экендигин далилдөөгө болот. Мында ар кандай $z \in R_+$ үчүн x<y болгондо x+z<y+z. Ошондой эле R_+ көптүгүнөн алынган x жана y сандары үчүн x=x+y барабардыгы аткарылбайт.

Аныктоо: x жана y оң анык сандарынын көбөйтүндүсү деп

$$x_k \cdot y_k \le x \cdot y < x'_k \cdot y'_k$$

шартын канааттандыруучу x·y саны аталат.

Мисалы, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ көбөйтүндүсүнүн 0,1 тактыкта табалы. Аларды 0,01 тактыкка чейинки кеми жана ашыгы менен алынган жакындаштырылган маанилери тапсак

$$1,41 \le \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,73 \le \sqrt{3} < 1,74 .$$

Анда аныктоо боюнча $2,4393 \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} < 2,4708$ болот. Мындан $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=2,4\ldots$ же 0,1 тактыктагы берилген сандардын көбөйтүндүсү $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=2,4$ болот.

Көбөйтүү операциясы R_+ көптүгүндө коммутативдүү, ассоциативдүү жана кыскаруучу. Кошуу амалына карата дистрибутивдүү. Ошондой эле бир саны көбөйтүү амалына карата нейтралдык сан болот. Б.а. ар кандай x оң анык саны үчүн $1 \cdot x = x$ болот.

Кемитүү жана бөлүү амалдары жогорку амалдар аркылуу аныкталышат. Б.а. эгер $a > b$ болгон R_+ көптүгүнөн алынган a жана b сандары үчүн $a = b + c$ барабардыгы аткарыла тургандай $c \in R_+$ саны табылат. Ал сан a жана b сандарынын айырмасы деп аталып, $a - b$ деп белгиленет. Кошуу жана кемитүү амалдары өз ара тескери амалдар болгондуктан $x > y$ болгондо $(x+y)-y=x$ жана $(x-y)+y=x$ болот.

R_+ көптүгүнөн алынган ар кандай x жана y сандары үчүн $x = yz$ барабардыгы аткарыла тургандай $z \in R_+$ саны табылат. Ал сан x жана y сандарынын тийиндиси деп аталып, $x:y$ деп белгиленет. R_+ көптүгүндө бөлүү амалы дайыма аткарылуу менен $(xy):y=x$ жана $(x:y) \cdot y = x$ болот.

10. Оң анык сандар көптүгүнүн аксиоматикасы.

Биз жогоруда оң анык сандар деп чексиз ондук бөлчөктөрдү атадык. Бирок, чексиз бөлчөктөр анык сандардын жазылышынын бир формасы гана болуп эсептелет. Оң анык сандарды бир гана чексиз ондук бөлчөктөр түрүндө эмес чексиз экилик, үчтүк, төрттүк, ж.б. бөлчөктөр түрүндө да жазууга болот. Мисалы, санды чексиз экилик бөлчөк түрүндө жазсак 1001,001101.. көрүнүштө болмок.

Оң анык сан түшүнүгүн анын тигил же бул жазылыш формасы менен байланыштырбоо үчүн, алар канааттандырган аксиомалар системасын берүү керек. Мындай аксиомалар системасын бири кошуу операциясынын касиеттерине таянат. Мында негизги (аныкталбаган) түшүнүктөр болуп бир саны жана кошуу операциясы эсептелет. Бул түшүнүктөр төмөнкү аксиомалар системасын канаатандырышы керек:

1) $N \subset R_+$
2) Кошуу операциясы R_+ ден алынган каалаган (a,b) түгөйүнө ошол эле көптүктөн $a+b$ санын туура келтирет. Бул сан a жана b сандарынын суммасы, ал эми a жана b сандары кошулуучулар деп аталышат. R_+ көптүгүндөгү кошуу натуралдык сандарды кошуу менен бирдей.
3) Кошуу операциясы R_+ көптүгүндө коммутативдүү: R_+ ден алынган ар кандай a жана b сандары үчүн $a+b=b+a$.
4) Кошуу операциясы R_+ көптүгүндө ассоциативдүү: R_+ ден алынган ар кандай a, b жана c сандары үчүн $(a+b)+c=a+(b+c)$.

5). Эгер a жана b сандары R_+ көптүгүнө тиешелүү болушса, анда $a+b\neq a$.

6). Эгер a жана b сандары R_+ көптүгүнө тиешелүү болуп, $a\neq b$ болсо, анда же $a=b+c$ же $b=a+c$ барабардыгы аткарыла тургандай $c\in R_+$ саны табылат.

7). Ар кандай $a\in R_+$ жана натуралдык n саны үчүн $a=b+b+\ldots+b$ (n жолу) барабардыгы аткарыла тургандай $b\in R_+$ саны табылат.

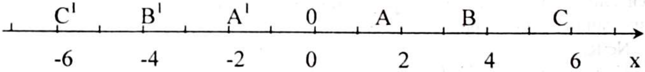
1) -7) аксиомалар R_+ көптүгүнө иреттүүлүк катнаштыгын кийирүүгө мүмкүнчүлүк берет б.а. $b=a+c$ барабардыгы аткарыла тургандай $c\in R_+$ саны табылганда гана $a<b$ болот.

8). Үзгүлтүксүздүк аксиомасы: Эгер X сан көптүгү Y сан көптүгүнүн сол жагында жатса (б.а. ар кандай $x\in X$, $y\in Y$ үчүн $x\leq y$ болсо), анда Хти Үтен бөлүп турган $a\in R_+$ саны табылат (б.а. ар кандай $x\in X$ жана $y\in Y$ үчүн $x\leq a\leq y$).

11. Анык сандардын көптүгү.

Оң анык сандардын жардамы менен негизинен бардык эле скалярдык чоңдуктарды (узундук, аянт, масса, көлөм, ж.б.) ченөөнүн натыйжаларын туюнтууга болот. Бирок, температура чоңдугунун айрым маанилерин (суук болгон) оң сан менен туюнтууга мүмкүн эмес. Ошондой эле практикада сан менен ченөөнүн натыйжасын гана эмес анын канчага өзгөргөндүгүн да сан менен туюнтууга туура келет. Ал эми чоңдуктун өзгөрүшү эки багыт боюнча жүрүшү мүмкүн: көбөйөт же азаят, айрым учурда өзгөрбөй калышы да мүмкүн. Ошол себептүү "жаңы" сандарды киргизүү менен R_+ көптүгүн кеңейтүү (толуктоо) зарылчылыгы келип чыгат.

Тегиздикте Ох координата огун алып, ал окто 2, 4, 6 оң сандарына туура келүүчү A,B,C чекиттерин көрсөтөбүз.



Ал чекиттер O чекитинин оң жагында жайгашкан болушат.

O чекитинен баштап карама-каршы багытта 2 бирдикти өлчөп коюп A^1 чекитин алабыз. Анын координатасын − 2 деп белгилейбиз. Б.а. $A^1(-2)$. Ошондой эле B чекитине O го карата симметриялуу болгон чекит $B^1(-4)$, C га симметриялуу болгон чекит $C^1(-6)$ болот. Мында 2 жана −2, 4 жана −4, 6 жана −6 сандарын **карама-каршы сандар** деп аташат.

Сан огундагы берилген багытта жайгашкан сандарды оң, ал эми берилген багытка карама-каршы жайгашкан сандарды терс сандар деп аташат. O саны оң дагы терс дагы сан эмес.

Аныктоо: Оң анык сандардын көптүгү менен терс анык сандардык көптүгүнүн жана нөл санынын биригүүсү анык сандардын көптүгү деп аталат жана R тамгасы менен белгиленет. Б.а.

$$R=R_+ U R\_ U\{O\}$$

Мында $R_+, R\_$ жана $\{O\}$ көптүктөрү эки экиден өз ара кесилишпеген көптүктөр. Анык сандардын көптүгү менен сан огундагы чекиттердин көптүгүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк бар б.а. ар бир анык санга сан огунун бир гана чекити жана тескерисинче, сан огундагы ар бир чекитке бир гана анык сан туура келет.

Координата башталышынан координатасы x болгон чекитке чейинки аралык берилген сандын модулу деп аталат жана |x| деп белгиленет. Демек,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{эгер } x > 0 \\ -x, & \text{эгер } x < 0 \\ 0, & \text{эгер } x = 0 \end{cases}$$

Мисалы: |5|=5, |-2,3|=2,3, |0|=0.

Анык сандарды салыштыруу алардын сан огундагы жайгашына жараша жүргүзүлөт: a<b болот, эгерде a b нын сол жагында жайгашса, a>b болот, эгерде a b нын оң жагында жайгашкан болсо.

Мындан: ар кандай оң сан нөлдөн чоң, ар кандай терс сан нөлдөн кичине, ар кандай терс сан ар кандай оң сандан кичине экендиги келип чыгат. Ошондой эле:

a-b оң сан болгонда гана a>b,

a-b терс сан болгондо гана a<b.

Ар кандай a жана b анык сандары үчүн же a>b, же a<b, же a=b болот.

Анык сандардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар төмөнкү эрежелер аркылуу жүргүзүлөт:

1) Эки анык сандын суммасы деп төмөнкү шарттарды канааттандырган сан аталат:

   а) эки оң сандын суммасы оң сан болот жана оң анык сандардын көптүгүндө аныкталгандай эреже менен табылат;

   б) эки терс сандын суммасы терс сан болот; сумманын модулу кошулуучулардын модулдарынын суммасына барабар;

в) белгилери ар түрдүү болгон сандардын суммасы модулу чоң болгон кошулуучунун белгисине ээ; сумманын модулун табуу үчүн чоң модулдан кичине модулду кемитүү керек.

2. Эки анык сандын көбөйтүндүсү деп төмөнкү шарттарды канааттандыруучу сан аталат:

а) эки оң сандын көбөйтүндүсү оң сан болуп, оң анык сандардын көптүгүндө колдонулган эрежелер аркылуу табылат;

б) эки терс сандын көбөйтүндүсү оң сан болот; белгилери ар түрдүү болгон сандардын көбөйтүндүсү терс сан болот; көбөйтүндүнүн модулун табуу үчүн алардын модулдарын көбөйтүү керек.

3. Анык сандарды кемитүү жана бөлүү амалдары, тиешелүү түрдө кошуу жана көбөйтүү амалдарына тескери амалдар катары аныкталышат. Анык сандардын көптүгүндө кемитүү амалы бөлүү амалы сыяктуу эле аткарылат (нөлгө бөлүүдөн башка).

IX ГЛАВА
Комбинаториканын элементтери.

Практикада айрым обьектилердин көптүгүнөн ага камтылган көптүктөрдү бөлүп алууга, тигил же бул көптүктүн элементтерин белгилүү бир тартипке келтирүүгө ж.б.у.с. маселелерди чечүүгө туура келет. Мисалы, жетекчи ар түрдүү жумуштарды кызматчыларга бөлүштүрөт, шахматчы ар түрдүү жүрүштөрдүн эң пайдалуусун тандайт, тренер спорттун түрлөрү боюнча мелдештер уюштурат ж.б. Бул маселелерде жумуштардын, жүрүштөрдүн, беттешүүлөрдүн комбинациясы жөнүндө сөз болгондуктан аларды комбинатордук маселелер деп аташат. Математиканын мындай комбинатордук маселелерди изилдеген бөлүгүн **комбинаторика** дешет.

Комбинаторикада чектүү көптүктөр, аларга камтылган көптүктөр, чагылыштар жана чектүү көптүктөрдүн элементтеринен түзүлгөн картеждер каралат. Ошол себептүү комбинаториканы чектүү көптүктөр теориясынын бөлүгү катары кароого болот.

Комбинатордук маселелерди чыгаруу негизинен төмөнкү эки жөнөкөй эрежелерге негизделген: сумма эрежеси жана көбөйтүндү эрежеси.

1. Сумма эрежеси.

Бул эреженин жардамы менен эки чектүү көптүктөрдүн биригүүсүндөгү элементтердин саны аныкталат

n элементтен турган чектүү X көптүгүнүн элементтеринин санын n(X) деп белгилеп, көптүктүн өзүн n– көптүк деп атайлы. Мисалы, эгер $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ болсо, анда $n(X)=6$ болот жана берилген көптүк 6-көптүк деп аталат.

Берилсин m элементтүү X көптүгү жана n элементтүү У көптүгү. Алардын биригүүсү болгон $X\cup У$ көптүгүндө канча элемент бар экендигин табабыз.

Эгер X жана У көптүктөрү кесилишпеген болсо, анда $X\cup У$ көптүгү m+n элемент кармап турат. Мисалы, эгер $X=\{a,b,c,d\}$, $У=\{e,f,g\}$ болсо, анда $X\cup У=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ көптүгүнүн $4+3=7$ элементи бар болот. Демек,

> Эгер өз ара кесилишпеген X көптүгүнүн m элементи, ал эми У көптүгүнүн n элементи бар болсо, анда алардын биригүүсүндө m+n элемент бар болот. б.а. эгер $X\cap У=\varnothing$ болсо, анда $n(X\cup У)=n(X)+n(У)$ болот.

Бул эреже комбинаторикада **сумма эрежеси** деп аталат.

Эгерде $X\cap У\neq\varnothing$ болсо, анда эреже башкача болоруна ишенүүгө болот. Мисалы, $X=\{a,b,c,d,e\}$ жана $У=\{d,e,f,g\}$ көптүктөрүнүн биригүүсү $X\cup У=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ көптүгүндө $5+4=9$ элемент жок. Себеби, алардын кесилиши $X\cap У=\{d,e\}$ көптүгүндө 2 элемент бар. Ошондуктан, ар кандай X жана У көптүктөрү үчүн

$$n(X\cup У)=n(X)+n(У)-n(X\cap У)$$

Демек, чектүү көптүктөрдүн биригүүсүндөгү элементтердин саны алардын ар биріндеги элементтердин суммасынан ал көптүктөрдүн кесилишинин элементтеринин санын кемиткенге барабар.

Төмөнкү формуланын да чын экендигине ишенүүгө болот:

$$n(X\cup У\cup Z)=n(X)+n(У)+n(Z)-n(X\cap У)-n(X\cap Z)-n(У\cap Z)+$$
$$+n(X\cap У\cap Z);$$

2. Көбөйтүндү эрежеси.

Комбинаториканын бул негизги эрежеси берилген чектүү көптүктөрдүн элементтеринен түзүлгөн картеждердин санын табуу менен байланышкан. Эң мурда төмөнкү маселелени карап көрөлү:

$X=\{x_1, x_2, \ldots,x_m\}$ жана $У=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ көптүктөрүнүн элементтериннен $\{x_i, y_k\}$ түрүндөгү канча түгөй түзүүгө болот?

Ал түгөйлөрдү таблица түрүндө жазалы:

$(x_1;y_1), (x_1;y_2), \ldots, (x_1;y_n)$
$(x_2;y_1), (x_2;y_2), \ldots, (x_2; y_n)$
……………………………………
$(x_m;y_1), (x_m;y_2), \ldots, (x_m;y_n)$

Бул тик бурчтук түрүндөгү таблицада m жолчо жана n мамыча болгондуктан, андагы түгөйлөрдүн саны mn экендиги көрүнүп турат.

Демек, X m-көптүгү менен У n- көптүктөрүнүн элементтеринен mn иреттелген түгөйлөрүн түзүүгө болот, б.а. X жана У көптүктөрүнүн элменттеринин сандарынын көбөйтүндүсүнө барабар.

Таблицадагы түгөйлөрдүн көптүгү X жана У көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү болгондуктан акыркы айтылышты

$n(XxУ)=n(X)\cdot n(У)$ (1)

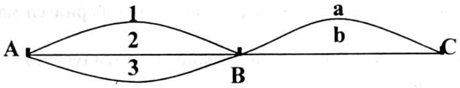
деп жазууга болот. Бул корутундунун жалпы учурун да далилдөөгө болот, б.а.

$n(X_1 \text{ x } X_2 \text{ x } \ldots \text{ x } X_n)= n(X_1)\cdot n(X_2) \ldots \cdot n(X_n)$ (2)

Комбинаторикада (1) барабардыкты төмөнкүчө да айтышат:

Эгер x элементин m жол менен, ал эми y элментин n жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда (x;y) түрүндөгү иреттелген түгөйлөрдү mn жол менен тандап алууга болот.

1-мисал: Эгер A кыштагынан B кыштагына баруучу 3 жол, ал эми B дан C кыштагына баруучу 2 жол бар болсо, анда A дан B аркылуу C га баруучу канча жол бар?



A дан B га барууга жолдорду 1, 2, 3, ал эми B дан C га баруучу жолдорду a, b деп белгилейбиз. Анда A дан C га баруучу жолдун ар бир варианты (1; a), (3; b), ... түрүндөгү түгөйлөр менен мүнөздөлөт. Ал түгөйлөрдүн саны көбөйтүндү эрежеси боюнча 3·2=6 га барабар, б.а. изделүүчү түгөйлөр

(1;a), (1;b), (2;a), (2;b), (3;a), (3;b)

Кээде айрым маселелерди чыгаруу үчүн бул эрежеңин жалпыланган учурун да колдонууга болот. y элементин тандоонун ар түрдүү варианты x элементинин тандалып алынган жолу менен аныкталгандыгына карабастан, y ти тандоо жолунун саны x ти тандоонун ар кандай жолу менен бирдей болот. Мында, x элементи тандалып алынгандан кийин (x;y) түгөйлөрүн mn жол менен тандалат (m− x элементин тандоонун саны, n− y элементинин тандоонун саны).

2-мисал: Ар кандай жанаша турган эки тамгасы окшош эмес 4 тамгадан турган сөздөрдүн санын тапкыла (алфавитте 33 тамга деп жана түзүлгөн сөздүн мааниси жок болушу да мүмкүн деп эсептелет. Мисалы «наса»).

Сөздөгү биринчи тамганы 33 түрдүү жол менен тандоого болору анык. Кийинки тамганы болсо 32 жол менен тандоого болот, себеби тандалган тамганы кайталоого болбойт. Үчүнчү тамга экинчиден айырмаланат, бирок биринчи менен окшош болушу да мүмкүн. Ошондуктан аны 32 жол менен тандоого болот. Ошондой эле төртүнчү тамга да 32 жол менен тандалат. Анда түзүлгөн бардык сөздөрдүн саны, жалпы эреже боюнча 33·32·32·32=1081344 га барабар.

3. Кайталануусу бар орундаштыруу.

X={a,b,c,d} деген 4-көптүк берилсин. Анын элементтеринен узундугу 2 болгон 16 картеж түзүүгө болот:

(a;a), (a;b), (a;c), (a;d),
(b;a), (b;b), (b;c), (b;d),
(c;a), (c;b), (c;c), (c;d),
(d;a), (d;b), (d;c), (d;d),

Ушундай мазмундагы төмөнкү жалпы түрдө берилген маселени чыгарабыз:

m- көптүк X тин элементтеринен узундугу k болгон картеждердин санын тапкыла.

Бул маселени чыгаруу үчүн k көбөйтүлүүчүлөрү бар XxXx…xX декарттык көбөйтүндүдөгү картеждердин санын табуу керек. Бирок көбөйтүү эрежеси боюнча $\underbrace{XxXx...xX}_{\text{К жолу}}$ декарттык

көбөйтүндүнүн элементтеринин саны $\underbrace{n(X)\cdot n(X)\cdot ...\cdot n(X)}_{\text{К жолу}}$ га барабар.

Шарт боюнча n(X)=m болгондуктан

$$n(XxXx...xX)=n(X)\cdot n(X)\cdot\ ...\ \cdot n(X)=\underbrace{m\cdot m\cdot ...\cdot m}_{\text{К жолу}}=m^k$$

Демек, m-көптүк X тин элементтеринен узундугу к болгон картеждердин саны m^k га барабар. Мисалы, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 деген 10 цифраны пайдаланып эки орундуу саны 10^2 болгон 00, 10, …, 99 сыяктуу номерлерди, 3 орундуу саны 10^3 болгон номерлерди түзүүгө болот. Же 36 тамганы пайдаланып 3 тамгадан турган 36^3 сөз, 4 тамгадан турган 36^4 сөз түзүүгө мүмкүн.

m- көптүктүн элементтеринен түзүлгөн узундугу к болгон картеж к дан алынып m элементтерден түзүлгөн кайталануусу бар орундаштыруу деп аталат. Ал картеждердин саны $\overline{A}_m^k$ деп белгиленет (arrangement деген француз сөзүнөн алынып, котормосу- орундаштыруу дегенди билдирет). Демек,

$$\overline{A}_m^k = m^k \qquad (1)$$

Бул формуланы пайдаланып, төмөнкү маселени чыгарууга болот:

m- көптүк X ке камтылган көптүктөрдүн санын тапкыла.

X көптүгүнүн элементтерин номерлеп чыгалы:

$X=\{x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\ ;\ ...\ x_m\}$

X ке камтылган ар бир A көптүгүн узундугу m болгон нөл жана бирден турган картеждин жардамы менен «шифрлеп» коюуга болот; эгер берилген номердеги элемент A көптүгүнө тиешелүү болсо, ал жерге 1 жазабыз, эгер тиешелүү болбосо 0 жазабыз. Мисалы, эгер $X=\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\}$ болсо, анда (0;1;1;0) картежи $\{x_2;x_3\}$ камтылган көптүгүн, (0;0;0;0;0) картежи бош көптүктү, ал эми (1;1;1;1;1) картежи бардык X көптүгүн шифрлейт.

Ошондуктан m-көптүк X ке камтылган көптүктөрдүн санын табуу үчүн {0;1} деген 2-көптүктүн элементтеринен түзүлгөн узундугу m болгон картеждердин санын табуу керек болот. (1) формула боюнча мындай картеждердин саны 2^m ге барабар. Демек, m-көптүк X ке камтылган көптүктөрдүн саны 2^m болот.

Мисалы, $X=\{a;b;c\}$ көптүгүнүн $2^3=8$ камтылган көптүктөрү бар: $\varnothing$,{a}, {b}, {c}, {a;b}, {a;c}, {b;c}, {a;b;c}.

4. Иреттелген көптүктөр. Орун алмаштыруу.

Аныктоо: Эгер X чектүү көптүгүнүн элементтери кандайдыр бир жол менен номерленген болсо, анда ал көптүк иреттелген көптүк деп аталат.

Иреттелген көптүк түшүнүгү картеж түшүнүгүнүн айрым бир учуру болот. Анын өзгөчөлүктөрү– элементтеринин ар башка болушу. Мисалы, (a,b,a,c,d) картежи иреттелген эмес, ал эми (a,b,c,d) картежи иреттелген көптүк.

Бир эле көптүктү ар түрдүү жол менен иреттөөгө болот. Мисалы, класстагы окуучулардын көптүгүн алардын жашы, бою, массасы, ж.б. боюнча иреттөөгө болот.

Төмөнкү маселени карап көрөбүз: m- көптүк X ти канча түрдүү жол менен иреттөөгө болот?

Иреттөө деген– бул берилген көптүктүн кандайдыр бир элементи биринчи, дагы бири экинчи, ..., акыркысы m-чи номер алары белгилүү. Биринчи номерди көптүктүн каалаган элементи алышы мүмкүн. Демек, биринчи элементти тандоо m түрдүү жол менен жүргүзүлөт. Эгер элемент тандалган болсо, анда экинчи орунга m-1 кандидат калат, себеби мурдагы тандоону кайталоого болбойт. Демек, экинчи элементти тандоонун m-1 түрдүү жолу бар. Үчүнчү элементти тандоонун m-2 түрдүү жолу болот ж.б. Акыркы элементти тандоонун бир гана жолу болот, себеби калган элементтердин бардыгы өз орундарын ээлешкен жана m-орунду ээлөө үчүн бир гана элемент калды.

Анда ireттөөнүн жалпы саны, көбөйтүү эрежеси боюнча m(m-1)(m-2)…2·1 ди түзөт. Биринчи m натуралдык сандардын көбөйтүндүсүн математикада «m факториал» деп аташат жана m! деп жазышат. Мисалы, 5!=1·2·3·4·5=120.

Демек, m-көптүк X ти иреттөөлөрдүн саны m! болот.

m- көптүктүн иреттелген көптүктөрү бири-биринен элементтеринин ирети (ээлеген орду) менен гана айырмаланып, бирдей эле элементтерден турушат, б.а. барабар көптүктөр болушат. Ошондой эле элементтери кайталанбайт. Ошондуктан аларды m элементтен турган кайталангыс орун алмаштыруу деп аташат жана P_m деп белгилешет. (Француздардын permutation деген сөзүнөн алынган, котормосу– «орун алмаштыруу»). Демек,

$$P_m = m! \qquad (1)$$

Мисалы, a,b,c,d тамгаларын кайталабастан 4!=24 жолу орун алмаштырууга болот:

abcd
abdc
acbd
acdb
adbc
adcb
bacd
badc
dcad
dcda
bdac
bdca
cabd
cadb
cbad
cbda
cdab
cdba
dabc
dacb
dbac
dbca
dcab
dcba

Ушул сыяктуу эле жогорку сыяктуу маселелердин жалпы учурун карап чыгууга болот, б.а.

m-көптүк X тин элементтеринен канча иреттелген k– көптүк түзүүгө болот?

Бул маселенин мурдагыдан айырмасы– иреттелген k–көптүктү түзүү k элементтерди тандоо менен аяктайт. Ошондуктан, мындай иреттелген камтылган көптүктөрдүн саны төмөнкү к сандарынын көбөйтүндүсүнө барабар: m, m-1, m-2, m-к+1. Демек, m-көптүк X тин элементтеринен түзүлгөн иреттелген к-көптүктөрдүн саны

m(m-1)(m-2)… (m-к+1) болот.

Мындай иреттелген к- көптүктөр к дан алынган m элементтен түзүлгөн кайталангыс орундаштыруу деп аталат жана A_m^k деп белгиленет. Анда

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)\ldots(m-к+1) \quad (2)$$

Барабардыктын оң жагын 1·2·3…(m-к) туюнтмасына көбөйтүп жана бөлүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$A_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-к+1)(m-к)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\ldots(m-к)} = \frac{m!}{(m-к)!}$$

б.а. $A_m^k = \dfrac{m!}{(m-к)!}$ (3)

Мында $A_m^m = P_m = m!$, себеби $0! = 1$

5. Кайталангыс топтоштуруулар.

Комбинаториканын төмөнкү маселесин карап көрөбүз:

Берилген m-көптүк X тин элементтеринен, ар биринде k дан элемент болгон канча камтылган көптүк түзүүгө болот?

Мындай көптүктөр <u>m элементтен k дан алынган кайталангыс топтоштуруулар</u> деп аталышат жана C_m^k деп белгиленет. (Французча combinasion сөзү «топтоштуруу» деп которулат). C_m^k үчүн формула келтирип чыгарабыз.

m-көптүк X тен k-көптүк A ны тандап алабыз. A көптүгүндө k элемент болгондуктан аны к! жолу иреттөөгө болот. Мында X көптүгүнүн элементтеринен турган ар бир иреттелген k-көптүк жогоркудай жол менен түзүлөт. Демек, X көптүгүнүн элементтеринен түзүлгөн иреттелген k–көптүктөрүнүн саны, X теги иреттелбеген k–көптүктөрдүн санынан k! эсе көп. Мисалы, A={a,b,c,d} көптүгүнүн элементтеринин 4 камтылган 3-көптүктөрүн түзүүгө болот:

{a;b;c}, {a;b;d}, {a;c;d}, {b;c;d}.

Ал эми иреттелген 3-көптүктөрдүн саны 3!=6 эсе көп, б.а.

{a;b;c}, {a;b;d}, {a;c;d}, {b;c;d},
{a;c;b}, {a;d;b}, {a;d;c}, {b;d;c},
{b;a;c}, {b;a;d}, {c;a;d}, {c;b;d},
{b;c;a}, {b;d;a}, {c;d;a}, {c;d;b},
{c;a;b}, {d;a;b}, {d;a;c}, {d;b;c},
{c;b;a}, {d;b;a}, {d;c;a}, {d;c;b}

Иреттелген к-көптүктөрдүн саны A_m^k, ал эми камтылган к-көптүктөрүнүн саны C_m^k болгондуктан $A_m^k = к! \cdot C_m^k$ же $A_m^k = \dfrac{m!}{(m-к)!}$ экендигин эске алып $C_m^k = \dfrac{m!}{(m-к)!к!}$ формуласын алабыз. Бул формула m-көптүк X теги камтылган к-көптүктөрүнүн санын көрсөтөт.

<u>Мисалы</u>: 12 адамдан турган группадан 5 тен мүчөсү бар командаларды канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

Команданын мүчөлөрүнүн тартиби мааниге ээ болбогондуктан 12-көптүктөн канча камтылган 5- көптүктөрдүн бар экендигин табабыз:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

6. C_m^k сандарынын касиеттери

C_m^k сандары m-көптүк X тин камтылган к-көптүктөрүнүн санын билдирүү менен бир топ касиеттерге ээ. Ал касиеттер X ке камтылган көптүктөрдүн ортосундагы ар түрдүү байланыштарды билдирет.

1) Эгер 0≤к<m болсо, анда $C_m^k = C_m^{m-k}$ болот (1). Мурдагы пункттагы формуланы пайдаланып

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-к)![m-(m-к)]!} = \frac{m!}{(m-к)!к!} = C_m^k$$ экендигин алабыз.

2) 0≤к<m болгон ар кандай к жана m үчүн

$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$ (2)

барабардыгы туура болот. Чындыгында:

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{(m-1)!}{(к-1)!(m-к)!} = \frac{(m-1)!к}{к!(m-к)!}$$

$$C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{к!(m-к-1)!} = \frac{(m-1)!(m-к)!}{к!(m-к)!}$$

болгондуктан алардын суммасын тапсак

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!к}{к!(m-к)!} + \frac{(m-1)!(m-к)}{к!(m-к)!} = \frac{(m-1)!(к+m-к)!}{к!(m-к)!} =$$

$$= \frac{m!}{к!(m-к)!} = C_m^k$$ болот.

Эгер к=0 болсо, анда $C_m^0 = C_{m-1}^{-1} + C_{m-1}^0$ болот. $C_m^0 = C_{m-1}^0 = 1$ болгондуктан C_{m-1}^{-1} =0 жана к>m болгондогу C_m^k =0 маанилерин ордуларына коюп (2) формула к=m болгон учурда да туура экендиги келип чыгат.

(2) формуланын жардамы менен C_{m-1}^k жана C_{m-1}^{-1} сандары белгилүү болсо C_m^k нын маанисин табууга болот. б.а. C_m^k нын

маанилери m=0, m=1, m=2, ж.б. болгондогу маанилерин удаалаш таап алууга болот. Ал маанилерди төмөнкү үч бурчтуу таблица түрүндө жазуу ыңгайлуу:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
- -

Бул таблица француз математиги Блез Паскалдын (1623-1662) атынан Паскалдын үч бурчтугу деп аташат. Бирок, бул таблица улуу араб математиги Омар Хайямдын эмгектеринде XIII кылымда эле белгилүү болгондугу жөнүндө маалыматтар бар.

Таблицанын m+1− катарында C_m^0, C_m^1, ..., C_m^m сандары катары менен турушат. Мында $C_m^0 = C_m^1 = 1$, ал эми калган маанилери (2) формула боюнча табылат.

C_{m-1}^{k-1} жана C_{m-1}^{k} сандары C_m^k ге караганда бир катарга жогору жана ал катарда анын оң жана сол жактарында жайгашкандыктан C_m^k нын маанисин табуу үчүн үстүнкү катардагы өзүнүн оң жана сол жактарындагы сандарды кошуп коюу керек. Мисалы, 7-катардагы 6 санын табуу үчүн үстүнкү катардагы 1 жана 5 сандарын кошуу керек; 15 санын алуу үчүн үстүнкү катардагы 10 жана 5 сандарын кошуу керек.

X ГЛАВА

Барабардыктар. Барабарсыздыктар. Теңдемелер.

1. Сан туюнтмалары. Амалдарды аткаруу тартиби

Төмөнкү маселелени карайлы: «Курманжан 3 сомдон 2 дептер жана 7 сомго альбом сатып алды. Ал бардыгына канча төлөдү?» Бул маселени чыгарууда эң оболу дептерлердин наркын таап (3·2), кийин пайда болгон көбөйтүндү менен 7 санынын суммасын табуу керектиги анык. Б.а. 3·2+7 деген <u>сан туюнтмасы</u> пайда болот. Алар сандардан, амалдардын белгилеринен жана кашаалардан куралат. Демек, бир сан же амалдардын (операциялардын) белгилери менен бириктирилген эки же андан ашык сандар сан туюнтмасы деп аталат.

Мисалы: 4, 3·2+7, 6:3−4, 420−(47+13)·2, …

Туюнтмадагы амалдарды аткаруудан келип чыккан сан туюнтманын сан мааниси деп аталат. Мисалы, 40−6·5 туюнтмасынын сан мааниси 10 го барабар.

Практикада бардык эле сан туюнтмалары сан мааниге ээ боло бербейт. Мисалы, 27:(5−5) туюнтмасы сан мааниге ээ эмес, себеби 27 санын нөлгө бөлүү мүмкүн эмес.

Сан туюнтмаларынын маанисин табууда көрсөтүлгөн амалдарды аткаруу тартиби чоң мааниге ээ. Мисалы, 60:20+10:2 туюнтмасы бир маанилүү болгондугуна карабастан, амалдардын аткаруу тартибин өзгөртүү менен ошол эле туюнтма үчүн 8 жана 1 деген эки түрдүү сан маанини алууга болот.

Ошол себептүү математикада бул маселе боюнча төмөнкүдөй катуу тартип кабыл алынган:

1. Эгер туюнтмада бир эле баскычтагы амалдар катышкан болсо, анда алар солдон оңго карай көрсөтүлгөн катары менен аткарылат. (Биринчи баскычтагы амалдар– көбөйтүү жана бөлүү, экинчи баскычтагылар– кошуу жана кемитүү).
2. Эгер туюнтмада эки баскычтын тең амалдары аралаш берилсе, анда эң мурда биринчи баскычтагы, андан кийин экинчи баскычтагы амалдар аткарылат.
3. Эгер туюнтмада кашаалар катышкан болсо, анда эң оболу кашаалардын ичиндеги амалдар жогорку 1-2 эрежелерге таянып аткарылат. Кашаалардын катары– тегерек, чарчы жана фигуралык болот.

Мисалы, төмөнкү туюнтма үчүн амалдарды аткаруу тартибин ар бир амалдын үстүнө жазабыз:

$$\{[(36 \overset{1}{:} 2 \overset{2}{-} 14) \overset{5}{\cdot} (42 \overset{3}{\cdot} 2 \overset{4}{-} 14) \overset{6}{+} 20] \overset{7}{:} 2\} \overset{8}{+} 100$$

Эгер эки сан туюнтмаларынын маанилери дал келишсе (бирдей болсо), анда алар барабар сан туюнтмалары деп аталышат. Мисалы: 5+4 жана 10−1, 49:7 жана 15−8 туюнтмалары өз ара барабар. Сан туюнтмаларынын көптүгүндө бул катнаштыктын рефлексивдүү, симметриялуу жана транзитивдүү экендиги анык.

Математикада ар түрдүү сандардан башка да тамгаларды кармап турган туюнтмаларды кездештирүүгө болот. Мисалы: a+3, x+y, 5c+1,... Булар тамгалуу же белгисиздүү туюнтмалар болушат. Акыркыдай аталгандыгынын себеби a+3 туюнтмасы a тамгасы кандай маанини кабыл алса ошого жараша түрдүү сан мааниге ээ. б.а.

a=5 *болсо* 5+3=8
a=10 *болсо* 10+3=13
a=20 *болсо* 20+3=23, ж.б.

Демек, туюнтмадагы өзгөрүлмө− бул ар түрдүү мүмкүн болгон сандар менен алмаштырууга боло турган шарттуу белги (символ) болуп эсептелет. Туюнтмадагы өзгөрүлмөнүн ордуна коюуга мүмкүн болгон сандар өзгөрүлмөнүн маанилери, ал эми алардын көптүгү берилген туюнтманын аныкталуу областы деп аталат.

Акыркы сүйлөмдөрдөгү «мүмкүн болгон» деген кыстармалардын мааниси төмөндөгүчө:

1. a−3 туюнтмасынын анык сандардын көптүгүндөгү аныкталуу областы− ар кандай анык сандар, б.а.]−∞, ∞[. Ал эми натуралдык сандардын көптүгүндө болсо− 3 төн чоң болгон гана натуралдык сандардын көптүгү болот.
2. $\frac{5}{\sqrt{x-4}}$ туюнтмасынын аныкталуу областы− $]4,\infty[\,.\in R$

Берилген туюнтмалар өзгөрмөлөрдүн башка маанилеринде мааниге ээ эмес, б.а. аныкталбайт.

2. Сан барабардыктары жана алардын касиеттери

Аныктоо: «Барабар» белгиси менен бириктирилген A жана B сан туюнтмалары сан барабардыгы деп аталышат. б.а. A=B− бул сан барабардыгы.

Мисалы: 15−3=12, 5=5, 45:9=30:3, 16+1=20:2, ...

Мектеп курсунан сан барабардыктарынын төмөнкү эки негизги касиети белгилүү:

1^0. Эгер $A=B$ сан барабардыгынын эки жагына тең мааниге ээ болгон С сан туюнтмасын кошсок, анда $A+C=B+C$ деген чын барабардык келип чыгат. б.а. $A=B \Rightarrow A+C=B+C$.

Мисалы: $12-7=20:4 \Rightarrow 12-7+7=20:4+7 \Rightarrow 12=12$

2^0. Эгер $A=B$ сан барабардыгынын эки жагын тең мааниге ээ болгон С сан туюнтмасына көбөйтсөк, анда $A \cdot C=B \cdot C$ деген туура сан барабардыгы келип чыгат. б.а. $A=B \Rightarrow A \cdot C=B \cdot C$.

Мисалы: $5 \cdot 3=20-5 \Rightarrow (5 \cdot 3) \cdot 2=(20-5) \cdot 2$

Ошондой эле жогоркуларга таянып:

Эгер $A=B$ жана $C=D$ сан барабардыктары туура болсо, анда көрсөтүлгөн амалдар аткарылган шартта төмөнкү барабардыктар да туура болору ачык көрүнүп турат:

$(A)+(C)=(B)+(D)$; $(A) \cdot (C)=(B) \cdot (D)$;

$(A)-(C)=(B)-(D)$; $(A):(C)=(B):(D)$.

Сан барабардыктарынын үстүнөн, айтылыштар сыяктуу эле конъюнкция, дизъюнкция, импликация, тануу, ж.б. сыяктуу логикалык операцияларды жүргүзүүгө болот.

3. Сан барабарсыздыктары жана алардын касиеттери

Аныктоо: «>(чоң)» же «<(кичине)» белгилери менен бириктирилген А жана В сан туюнтмалары сан барабарсыздыгы деп аталат. б.а. $A>B$ же $A<B$.

Мисалы: $7>3$, $5+2<5+3$, $45:3>16:4-3$, …

Сан барабарсыздыктары да айтылыш болушат. б.а. $6-3>5-2$ –бул чын, $14:2<20-15$– бул жалган айтылыштар.

$A>B$ жана $C>D$ барабарсыздыктары бирдей маанидеги, ал эми $A>B$ жана $C<D$ карама-каршы маанидеги барабарсыздыктар деп аталышат.

Ошондой эле төмөнкү айтылыштардын да чын экендиги белгилүү:

1. Ар кандай a жана b анык сандары үчүн
   же $a>b$, же $a<b$, же $a=b$.
2. a жана b анык сандардынын айырмасы оң сан болгондо гана ($a-b>0$), a саны b дан чоң болот ($a>b$).
3. a жана b анык сандарынын айырмасы терс сан болгондо гана ($a-b<0$), a саны b дан кичине болот ($a<b$).
4. a жана b анык оң сандарынын суммасы жана көбөйтүндүсү да оң сандар болушат. б.а. $a>0$, $b>0 \Rightarrow a+b>0$, $a \cdot b>0$.

Сан барабарсыздыктары төмөнкү негизги касиеттерге ээ болушат:

1^0. Ар кандай а жана b үчүн эгер $a>b$ болсо, анда $b<a$.

Далилдөө: $a>b$ болгондуктан $a-b>0$ болот. Анда $b-a<0$, демек $b<a$.

2^0. Ар кандай a, b жана c сандары үчүн эгер $a>b$, $b>c$ болсо, анда $a>c$ болот.

Далилдөө: Шарт боюнча $a>b$ жана $b>c$ болгондуктан $a-b>0$ жана $b-c>0$ болушат. Анда акыркы оң сандардын суммасы да оң сан болот. б.а. $(a-b)+(b-c)>0$ же $a>c$.

3^0. Ар кандай а саны үчүн $a>a$ жана $a<a$ барабарсыздыктары дайыма жалган.

Далилдөө: Айталы $a>a$ болсун, анда 1-касиеттин негизинде $a<a$ болот. Булардан $a-a>0$ жана $a-a<0$ болору келип чыгат. Сандардын айырмасы бирөө гана болгондуктан $a>a$ дегенибиз туура эмес. Демек, касиет туура.

4^0. Ар кандай a, b жана c сандары үчүн, эгер $a>b$ болсо, анда $a+c>b+c$. б.а. эгер барабарсыздыктын эки жагына тең бир эле санды кошсо, анда берилген барабарсыздыкка бирдей маанидеги барабарсыздык келип чыгат. (Монотондуулук).

Далилдөө: $(a+c)-(b+c)=(a-b)+(c-c)=a-b$. Бул өзгөртүп түзүүнүн натыйжасы оң сан болгондуктан (шарт боюнча) б.а. $a-b>0$, барабардыктын сол жагы да оң сан болот. б.а.

$$(a+c)-(b+c)>0 \text{ же } a+c>b+c$$

Ошондой эле $a-c=a+(-c)$

$b-c=b+(-c)$ болгондуктан

$a>b$ барабарсыздыгынан

$a-c>b-c$ экендиги келип чыгат.

4-касиеттен төмөнкү натыйжа келип чыгат:

> Ар кандай кошулуучуну барабарсыздыктын бир жагынан экинчи жагына алып өтүүгө болот, бул учурда анын белгиси карама-каршы белгиге өзгөрөт.

Чындыгында, $a+b>c$ барабарсыздыгынын эки жагына тең $(-b)$ санын кошуу менен $a>c-b$ барабарсыздыгын алабыз.

5^0. Ар кандай a, b жана c сандары үчүн

а) Эгер $a>b$ жана $c>0$ болсо, анда $ac>bc$.

б) эгер $a>b$ жана $c<0$ болсо, анда $ac<bc$.

Далилдөө:

а) $a>b$ болгондуктан $a-b>0$ болот. Анда оң сандардын көбөйтүндүсү да оң болот б.а. $(a-b)\cdot c>0$ же $ac-bc>0$. Мындан, $ac>bc$.

б) $a-b>0$ оң жана $c<0$ терс сандарынын көбөйтүндүсү катарында $(a-b)\cdot c<0$ болот. Мындан $ac-bc<0$ же $ac<bc$ болот.

Бул 1-5- касиеттери «чоң» катнаштыгы үчүн гана эмес «кичине» катнаштыгы үчүн да туура.

6^0. Ар кандай a, b, c жана d үчүн:

а) эгер $a>b$, $c>d$ болсо, анда $a+c>b+d$.

б) эгер $a<b$, $c<d$ болсо, анда $a+c<b+d$

Далилдөө:

а) Шарт боюнча $a>b$ жана $c>d$ болгондуктан $a-b>0$ жана $c-d>0$ болот. Анда $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$

б.а. $a+c>b+d$ экендиги келип чыгат.

б) Бул учурдун далилдөөсү окуучуга сунуш кылынат.

7^0. Ар кандай a, b, c жана d сандары үчүн $a>b$ жана $c<d$ болсо, анда $a-c>b-d$ болот.

Далилдөө: Жогорку сыяктуу эле $a>b$ жана $c<d$ болгондуктан $a-b>0$ жана $d-c>0$ болот.

Анда $(a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0$ же $a-c>b-d$ болот.

8^0. Эгер a, b, c жана d сандары оң сандар болсо, анда $a>b$ жана $c>d$ барабарсыздыктарынан $ac>bd$ барабарсыздыгы келип чыгат.

Далилдөө: $a>b$ барабарсыздыгынын эки жагын тең c санына, ал эми $c>d$ барабарсыздыгынын эки жагын тең b санына көбөйтүп $ac>bc$ жана $bc>bd$ экендигин алабыз. Анда «чоң» катнаштыгынын транзитивдүүлүгүнөн $ac>bd$ келип чыгат.

Натыйжа: Эгер $a>b>0$ жана n натуралдык саны берилсе, анда $a^n>b^n$ болот.

9^0. Эгер $a>b$ болсо, анда $-a<-b$ болот.

Чындыгында, $a>b$ болгондуктан $a-b>0$ болот.

Бирок, $a-b=(-b)-(-a)>0$ же $-b>-a$ же $-a<-b$

10^0.Эгер $0<a<b$ же $a<b<0$ болсо, анда $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

Далилдөө: Далилдөө үчүн $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ экендигин эске алуу керек.

Шарт боюнча a жана b сандарынын белгилери бирдей болгондуктан

$ab>0$ болот. Демек $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ жана $b-a$

туюнтмаларынын белгилери бирдей болот. Ошол себептүү

b-a>0 болгондуктан $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$ болот, б.а. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

4. Сан барабарсыздыктарынын конөюнкциясы жана дизөюнкциясы.

Сан барабарсыздыктары да айтылыш болгондуктан «жана», «же» байланыштарынын жардамы менен алардын конъюкциясын жана дизъюнкциясын түзүүгө болот. Мисалы: «15>10 жана 7>4 жана 5>2». Мындай конъюнкцияны математикада көбүнчө фигуралык кашаанын жардамы менен төмөнкүчө жазылат:

$$\begin{cases} 15>10 \\ 7>4 \\ 5>2 \end{cases}$$

Ал эми «7<10 же 12>8» дизъюнкциясын чарчы кашаанын жардамы менен төмөнкүчө жазышат:

$$\left[\begin{array}{l} 7<10 \\ 12>8 \end{array}\right.$$

Пайда болгон курама айтылыштардын качан чын качан жалган болушу бизге белгилүү.

Математикада «7>4 жана 4>2» конъюнкциясын кош барабарсыздык түрүндө да төмөнкүчө жазышат: «7>4>2». Ал эми «a>b же a=b» дизьюнкциясын «a≥b» деп да жазышат. Ошондой эле a≠b жазуусу «a>b» же «a<b» барабарсыздыктарынын дизьюнкциясына тең күчтүү.

5. Бир белгисиздүү теңдемелер

Бирдей белгисизди кармап турган 6x+2 жана 5x деген туюнтмаларын «барабар» белгиси менен бириктирсек 6x+2=5x деген математикалык сүйлөм пайда болот. Бул сүйлөм курамындагы белгисиздин кээ бир маанисинде чын, кээ бир маанисинде жалган айтылыштарды пайда кылат. Мисалы, x=−2 болгондо −10=−10 деген чын айтылыш, ал эми x=5 болгондо 32=25 деген жалган айтылыш келип чыгат. Демек, бул сүйлөм бир орундуу предикат болот.

Аныктоо: Эгер f(x) жана g(x) аныкталуу областтары X болгон x өзгөрмөлүү туюнтмалары берилсе, анда f(x)=g(x) предикаты бир белгисиздүү теңдеме деп аталат.

Предикаттын чындык маанилеринин көптүгү теңдеменин тамырларынын көптүгүн түзөт. Демек, теңдемени чыгаруу үчүн ал предикатты чын айтылышка айландыруучу же туура барабардык келип чыга турган белгисиздин маанилерин табуу керек. Белгисиздин мындай маанилери берилген теңдеменин тамыры же чыгарылышы деп аталат. Мисалы:

1) $5x-4=4x$, $x\in R$. Бул теңдеме $x=4$ болгондо гана чын айтылышты пайда кылат. Демек, анын тамырларынын көптүгү $T=\{4\}$.

2) $(x-2)(2x-8)=0$, $x\in R$. Бул теңдеме үчүн $T=\{2;4\}$.

3) $(2x+1)\cdot 3=6x+3$, $x\in R$. Бул теңдеме x тин ар кандай маанисинде туура барабардык пайда кылат. Демек, бул учурда $T=]-\infty;\infty[$.

4) $(2x+1)\cdot 3=6x+5$, $x\in R$. Бул теңдеме x тин эч кандай маанисинде чын айтылыш пайда кылбайт. Бул учурда теңдеменин тамыры жок деп аташат. б.а. $T=\varnothing$.

6. Тең күчтүү теңдемелер жана алардын негизги касиеттери

Аныктоо: Тамырларынын көптүктөрү барабар болгон көптүктөр тең күчтүү теңдемелер деп аталат. б.а. биринчи теңдеменин ар бир тамыры экинчи теңдеменин да тамыры жана тескерисинче, экинчи теңдеменин ар бир тамыры биринчи теңдеменин да тамыры болсо, анда ал теңдемелер тең күчтүү болушат. Же, $f_1(x)=f_2(x)$ жана $g_1(x)=g_2(x)$ предикаттары эквиваленттүү болсо, анда алар тең күчтүү.

Мисалы, $(x+1)^2=9$ жана $(x-2)(x+4)=0$ теңдемелери тең күчтүү, себеби $T_1=T_2=\{2;-4\}$. Ал эми $x+1=7$ жана $(x-6)(x-3)=0$ теңдемелери тең күчтүү эмес. Себеби, $T_1=\{6\}\neq T_2=\{6;3\}$. Ошондой эле эч кандай тамырлары жок теңдемелер да тең күчтүү болушат.

Практикада тигил же бул теңдеменин тамырларын табуу үчүн ал теңдемени берилген теңдемеге тең күчтүү болгон жана ага караганда бир топ жөнөкөй теңдемеге өзгөртүп (теңдеш) түзүүгө туура келет. Мындай өзгөртүп түзүүгө тең күчтүү теңдемелердин төмөнкү касиеттери теориялык негиз болушат.

Теорема-1: Эгер X көптүгүндө $f(x)=g(x)$ теңдемеси жана ошол эле көптүктө x тин ар кандай маанисинде аныкталган $h(x)$ туюнтмасы берилсе, анда

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

$$f(x)+h(x)=g(x)+h(x) \quad (2)$$

теңдемелери X көптүгүндө тең күчтүү болушат.

Далилдөө:

1) (1) теңдеменин $x=a$ деген тамыры болсун, анда $f(a)=g(a)$ болот. Бул барабардыктын эки жагына тең $h(a)$ санын кошсок $f(a)+h(a)=g(a)+h(a)$ деген сан барабардыгы келип чыгат.

Мындан, $x=a$ саны (2) теңдеменин да тамыры экендиги көрүнүп турат.

2). Айталы $x=b$ саны (2) теңдеменин тамыры болсун. анда ордуна койсок $f(b)+h(b)=g(b)+h(b)$ деген чын айтылыш пайда болот. Акыркы барабарсыздыктын эки жагына тең $-h(a)$ санын кошсок $f(a)=g(a)$ экендиги келип чыгат. Демек, $x=b$ саны (1) теңдеменин да тамыры экен.

Ошентип, аныктоого ылайык (1) жана (2) теңдемелер тең күчтүү.

Бул теоремадан төмөнкүдөй натыйжалар келип чыгат.

1. Берилген теңдеменин эки жагына тең бир эле санды кошсок, анда пайда болгон теңдеме берилген теңдемеге тең күчтүү болот. Мисалы, $2x-3=7$ теңдемеси менен $2x-3+3=7+3$ же $2x=10$ теңдемеси тең күчтүү.
2. Эгер теңдеменин кандайдыр бир кошулуучусун, белгисин карама-каршы белгиге алмаштырып, теңдеменин бир жагынан экинчи жагына алып өтсө, анда пайда болгон теңдеме берилген теңдемеге тең күчтүү болот.

   Мисалы, $5x-3=2x+6$ теңдемеси менен $5x-2x=6+3$ теңдемеси тең күчтүү. Себеби, берилген теңдеменин эки жагына тең $3-2x$ туюнтмасын коштук.
3. Ар кандай теңдеме $\Phi(x)=0$ түрүндөгү теңдеме менен тең күчтүү болот.

   Чындыгында, $f(x)=g(x)$ теңдемесинин эки жагына тең $-g(x)$ туюнтмасын кошуп, $f(x)-g(x)=0$ теңдемесин алууга болот.

Теорема-2: Эгер X көптүгүндө $f(x)=g(x)$ теңдемеси жана ошол эле көптүктө аныкталган, x тин эч кандай маанисинде нөль келип чыкпаган $h(x)$ туюнтмасы берилсе, анда

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x) \qquad (3)$$

теңдемелери X көптүгүндө тең күчтүү болушат.

Бул теореманы да жогорку теорема сыяктуу эле далилдөөгө болот.

Акыркы теоремадан практика үчүн эң керектүү болгон төмөнкүдөй натыйжа келип чыгат:

Натыйжа: Эгер теңдеменин эки жагын тең нөлдөн айырмаланган бир эле санга көбөйтсө же бөлсө, анда берилген теңдемеге тең күчтүү болгон теңдеме келип чыгат.

Мисалы: $\frac{1}{3}x=2$ жана $x=6$ теңдемелери

$7x=14$ жана $x=2$ теңдемелери

теӊ күчтүү болушат.

Теӊ күчтүү теңдемелердин жогорку касиеттерин жана ушуга чейин белгилүү болгон эрежелерди пайдаланып, берилген тигил же бул бир белгисиздүү сызыктуу теңдемелерди чыгарууга болот.

Мисалы: $x-\frac{3x-2}{5}=3-\frac{2x-5}{3}$ теңдемеси берилсин.

1) Жалпы бөлүмгө келтиребиз:

   $15x-9x+6=45-10x+25$

2) Теңдеменин эки жагына теӊ $10x-6$ туюнтмасын кошобуз (белгисиздүү мүчөлөрүн теңдеменин сол жагына, белгилүү мүчөлөрүн оң жагына алып өтөбүз):

   $15x-9x+10x=45+25-6$

3) Тиешелүү амалдарды аткарабыз:

   $16x=64$

4) Теңдеменин эки жагын теӊ 16 га бөлөбүз:

   $x=4$.

Демек, берилген теңдеменин тамырларынын көптүгү $T=\{4\}$ экен.

7. Бир белгисиздүү барабарсыздыктар. Теӊ күчтүү барабарсыздыктар

Аныктоо: **Аныкталуу областтары X болгон жана x өзгөрмөсү бар f(x) жана g(x) туюнтмалары берилсин. Анда $f(x)>g(x)$ же $f(x)<g(x)$ түрүндөгү барабарсыздыктар бир белгисиздүү барабарсыздык деп аталат.**

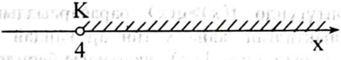
Теңдеме сыяктуу эле бир белгисиздүү барабарсыздык да бир орундуу предикат болот.

Мисалы: $2x-1>3$, $5x+1<x-7$, $7x-\frac{1}{2}>0$, ж.б.

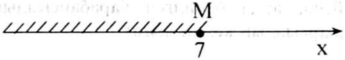
X көптүгүнөн алынган, берилген барабарсыздыкты чын айтылышка айландырган x тин мааниси, анын тамыры (чыгарылышы) деп аталат. Барабарсыздыктын тамырларынын көптүгүн табуу– аны чыгаруу болот.

Биз мында негизинен бир белгисиздүү биринчи даражадагы барабарсыздыктар жөнүндө сөз кылабыз.

$2x-1>7$ барабарсыздыгынын тамырларынын көптүгү болуп $T=]4;\infty[$ көптүгү эсептелет. Анын тамырларынын көптүгүн сан огунда сүрөттөп көрсөтүү ыңгайлуу. Мисалы, жогорку көптүк төмөнкүчө сүрөттөлөт:



Сан огундагы K чекитин «тегерекче» түрүндө шарттуу көрсөтүү– бул 4 саны тамыр эмес б.а. K чекити сан огунун штрихтелген бөлүгүнө тиешелүү эмес дегенди билдирет. Эгер көптүк T=]−∞,7] түрүндө ($x\leq7$) берилсе, анда ал «тегерекче» коюлбайт:



Эскертүү: Акыркы эки барабарсыздык тең анык сандардын көптүгүндө берилген.

Теңдемелер сыяктуу эле тең күчтүү барабарсыздыктар жөнүндө айтууга болот.

Аныктоо: Тамырларынын көптүктөрү барабар болгон барабарсыздыктар тең күчтүү барабарсыздыктар деп аталышат.

Мисалы: $2x-1>x+3$ жана $x-4>0$ барабарсыздыктары тең күчтүү, себеби

$$T_1=T_2=]4;\infty[.$$

Далилдөөлөрү тең күчтүү теңдемелердикине окшош болгон тең күчтүү барабарсыздыктардын касиеттерин беребиз.

Теорема-1: X көптүгүндө $f(x)>g(x)$ барабарсыздыгы жана ошол эле көптүктө аныкталган $h(x)$ туюнтмасы берилсин. Анда

$$f(x)>g(x) \qquad (1)$$

$$f(x)+h(x)>g(x)+h(x) \quad (2)$$

барабарсыздыктары X көптүгүндө тең күчтүү болушат.

Бул теоремадан практикада керек болгон төмөнкү натыйжалар келип чыгат:

1. $f(x)>g(x)$ барабарсыздыгынын эки жагына тең кандайдыр бир d анык санын кошсок, анда пайда болгон барабарсыздык берилген барабарсыздыкка тең күчтүү болот.
2. Барабарсыздыктын кээ бир кошулуучусун (сан туюнтмасын же тамгалуу туюнтмасын), белгисин карама-каршы белгиге алмаштырып, барабарсыздыктын бир жагынан экинчи жагына алып өтүүгө болот.

Теорема-2: X көптүгүндө $f(x)>g(x)$ барабарсыздыгы, ошол эле көптүктө аныкталган жана x тин ар кандай маанисинде оң маанилерди кабыл алган $h(x)$ туюнтмасы берилсе, анда

$$f(x)>g(x) \quad (1)$$
$$f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x) \quad (3)$$

барабарсыздыктары тең күчтүү болушат.

Натыйжа: Эгер барабарсыздыктын эки жагын тең бирдей оң анык санга көбөйтсө, анда берилген барабарсыздыкка тең күчтүү болгон барабарсыздык келип чыгат.

Теорема-3: X көптүгүндө $f(x)>g(x)$ барабарсыздыгы, ошол эле көптүктө аныкталган жана x тин ар кандай маанисинде терс маанилери кабыл алган $h(x)$ туюнтмасы берилсе, анда

$$f(x)>g(x) \quad (1)$$
$$f(x)\cdot h(x)<g(x)\cdot h(x) \quad (4)$$

барабарсыздыктары X көптүгүндө тең күчтүү болушат.

Натыйжа: Эгер барабарсыздыктын эки жагын тең бир эле терс анык санга көбөйтсө, анда пайда болгон барабарсыздык берилген барабарсыздыкка тең күчтүү болот.

Теорема-4: $0<f(x)<g(x)$ жана $0<\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{f(x)}$ барабарсыздыктары тең күчтүү.

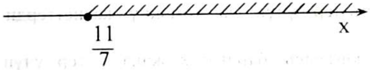
Жогорку касиеттерди жана мурда белгилүү болгон эрежелерди пайдаланып, бир белгисиздүү барабарсыздыктарды чыгарууга болот.

Мисалы: $\frac{3x+5}{4}-1\leq\frac{x-2}{3}+x$

1) Жалпы бөлүмгө келтиребиз:
   $9x+15-12\leq4x-8+12x$
2) Белгилүү жана белгисиздерин эки жакка топтоштурабыз (алып өтөбүз):
   $9x-4x-12x\leq-8-15+12$
3) Тиешелүү амалдарды аткарабыз:
   $-7x\leq-11$
4) Эки жагын тең -7 ге бөлөбүз ($-\frac{1}{7}$ ге көбөйтөбүз):

$x\geq\frac{11}{7}$; $\quad [\frac{11}{7};\infty[$

5) Тамырларынын көптүгүн сан огунда көрсөтөбүз:



8. Эки белгисиздүү теңдемелер.

Төмөнкү турмуштук маселени карап көрөлү:

«Короодо 19 баш тоок жана кой бар. Эгер алардын буттарынын саны 62 болсо, анда короодо канча тоок жана кой бар?»

Бул маселени арифметикалык жол менен да чыгарууга болот. Бирок, биз теңдеме түзүү аркылуу чыгарабыз.

Ал үчүн белгилөө киргизели:

x– короодогу тооктордун саны,

y– короодогу койлордун саны.

Анда бардык жандыктардын саны 19 болгондуктан $x+y=19$ деген теңдеме келип чыгат. Бардык буттардын саны 62 болгондуктан $2x+4y=62$ теңдемеси пайда болот.

Пайда болгон теңдемелерде көрүнүп тургандай экиден белгисиз бар. Ошондуктан алардын ар бирин өзүнчө бир маанилүү чыгаруу мүмкүн эмес. Мисалы, $x+y=19$ теңдемеси $x=7$, $y=12$; $x=6$, $y=13$; $x=10$, $y=9$; ж.б. деген x жана y тин ар түрдүү түгөй маанилеринде туура болот.

Мындай эки орундуу предикаттар эки белгисиздүү теңдемелер деп аталышат. Жогорку мисалда көрүнгөндөй мындай теңдемелердин тамыры (a;b) түрүндөгү түгөй болот, эгерде x тин ордуна a ны, y тин ордуна b ны койгондо предикат чын айтылыш пайда кылса.

Мисалы, $x+y=19$ теңдемесинин тамырлары болуп (7;12), (6;13), (10;9), ж.б. сыяктуу түгөйлөр болот.

Эки белгисиздүү теңдеменин тамыры болгон (a;b) түгөйүн декарттык координата системасында абциссасы a, ординатасы b болгон M(a;b) чекити аркылуу сүрөттөөгө болот. xoy тегиздигиндеги мындай чекиттердин көптүгү теңдеменин графиги болот. Мисалы, $x+y=19$ теңдемесинин графиги $M_1(4;15)$, $M_2(5;14)$, $M_3(10;9)$ чекиттери аркылуу өткөн түз сызык болот.

$y-x=0$ теңдемесин канааттандыруучу x жана y тин маанилери өз ара барабар болгондуктан, анын графиги xoy тегиздигинин I жана III чейректеринин биссектрисасы болуп эсептелет.

$(x-2)^2+(y-3)^2=16$ теңдемесинин графиги болуп борбору $O(2;3)$, радиусу 4 болгон айлана эсептелет. Себеби, $M(x;y)$ чекитинен $O(2;3)$ чекитине чейинки аралык $d=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ болот.

Бул теңдемелер үчүн да төмөнкү касиеттерди далилдөөгө болот:

1. Эгер $f(x,y)$ туюнтмасы бардык x жана y тер үчүн аныкталган болсо, анда
   $F(x,y)=\Phi(x,y)$ жана
   $F(x,y)+f(x,y)=\Phi(x,y)+f(x,y)$
   теңдемелери тең күчтүү.
2. Эгер $f(x,y)$ туюнтмасы бардык x жана y тер үчүн аныкталган болуп, x жана y тин эч кандай маанилеринде нөлгө барабар болбосо, анда
   $F(x,y)=\Phi(x,y)$ жана
   $F(x,y)\cdot f(x,y)=\Phi(x,y)\cdot f(x,y)$
   теңдемелери тең күчтүү.

9. Теңдемелердин, барабарсыздыктардын тобу жана системасы

Баштапкы пункттагы койлор жана тооктор жөнүндө маселе үчүн түзүлгөн теңдемелер $x+y=19$ жана $2x+4y=62$ тамыр боло турган $(a;b)$ түрүндөгү түгөйлөр эки теңдемени тең канааттандырганда гана берилген маселенин чыгарылышы болору анык. б.а. берилген маселени чыгаруу үчүн $x+y=19$ жана $2x+4y=62$ деген эки орундуу предикаттарды канааттандыруучу x жана y белгисиздеринин сан маанилерин табуу керек.

<u>Аныктоо</u>: $F(x,y)=0$ жана $f(x,y)=0$ теңдемелеринин конъюнкциясы ал теңдемелердин <u>системасы</u> деп аталат жана төмөнкүчө жазылат:

$$(F(x,y)=0)\wedge(f(x,y)=0) \text{ же } \begin{cases} F(x,y)=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

Жогоркуда айтылгандай теңдемелер системасынын тамыры болуп $F(a,b)=0$ жана $f(a,b)=0$ боло тургандай (a,b) түгөйлөрүнүн көптүгү эсептелет. Мисалы, берилген маселенин чыгарылышы болуп (7;12) түгөйү эсептелет (7 тоок, 12 кой). Себеби, $7+12=19$ жана $7\cdot2+4\cdot12=62$.

Практикада экиден ашык теңдемелердин да системасы кездешет.

Теңдемелер системасын чыгаруу жолдору бир нече б.а.

а) алгебралык кошуу жолу;
б) ордуна коюу жолу;

в) Крамердин эрежеси (эгер белгисиздер биринчи даражада болуп, алардын саны теңдемелердин саны менен бирдей болсо).

Аталган ыкмалар мектеп курсунда каралгандыктан бул курста кароонун кажети жок.

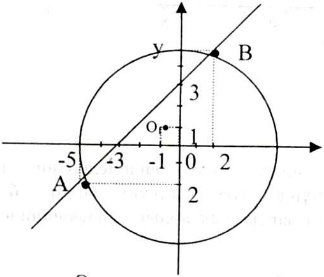
Математикада теңдемелер системасын графикалык жол менен да чыгарышат. Ал үчүн

1) бир эле координата системасына ар бир теңдеменин графиктери сызылат;
2) функциялардын (теңдемелердин) графиктеринин кесилишкен (система чыгарылышка ээ болсо!) чекиттеринин координаталары, берилген системанын тамырлары болот.

Мисалы:

$$\begin{cases} y-x=3 \\ (x+1)+(y-1)^2=25 \end{cases}$$ системасы берилсин.

Бизге белгилүү $y-x=3$ теңдемесинин графиги $(-3;0)$ жана $(0;3)$ чекиттери аркылуу өткөн түз сызык, ал эми $(x+1)^2+(y-1)^2=25$ теңдемесинин графиги болуп, борбору $(-1;1)$ чекитинде жаткан, радиусу 5 ке барабар болгон айлана болот.



Чиймеден алардын графиктери $A(-5;-2)$ жана $B(2;5)$ чекиттеринде кесилишкендиги көрүнүп турат. Демек, берилген системанын тамырларынын көптүгү $\{(-5;-2), (2;5)\}$ болот.

Эгер теңдемелер бир белгисиздүү болсо, анда алардын системасын чыгаруу ар бир теңдеменин чыгарылышы болгон көптүктөрдүн кесилишин таап коюу жетиштүү.

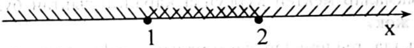
Теңдемелер системасы сыяктуу эле өзгөрүлмөсү бар барабарсыздыктардын системасы жөнүндө да сөз кылууга болот.

Мисал-1: $\begin{cases} 2x+3\geq5 \\ 7x-12\leq2, \end{cases}$ Мында $T_1=\{x|x\in R,\ x\geq1\}$, $T_1=\{x|x\in R,\ x\leq2\}$

Анда системанын чыгарылышы

$$T=T_1\cap T_2=\{x|\ x\in R,\ 1\leq x\leq 2\}$$

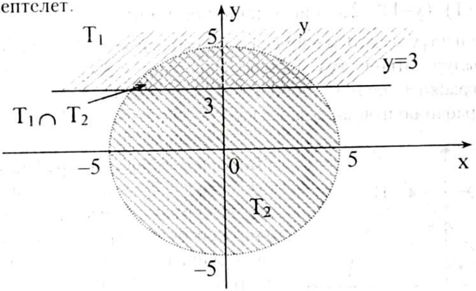
Сан огунда сүрөттөп көрсөтсөк:



Мисал-2: $\begin{cases} y\geq 3 \\ x^2+y^2\leq 25, \end{cases}$

T_1– y=3 сызыгынын жогорку жагындагы тегиздиктин бөлүгү;
T_2– борбору O(0;0) чекитинде жаткан, радиусу 5 болгон тегерек.

Анда системаны канааттандырган түгөйлөр болуп берилген тегеректен y=3 чызыгы аркылуу кесилип алынган сегменттин чекиттери болуп эсептелет.



Математикада система сыяктуу эле теңдемелердин же барабарсыздыктардын тобу жөнүндө сөз кылууга болот. б.а. теңдемелердин же өзгөрмөлүү брабарсыздыктардын дизъюнкциясы алардын тобу деп аталат жана

$$F(x,y)=0 \vee f(x,y)=0 \quad \text{же} \quad \left[\begin{array}{l} F(x,y)=0 \\ f(x,y)=0 \end{array}\right.$$

жана

$$F(x;y)>0 \vee f(x,y)>0 \quad \text{же} \quad \left[\begin{array}{l} F(x,y)>0 \\ f(x,y)>0 \end{array}\right.$$

деп белгиленет.

Алардын тамыры болуп берилген теңдемелер (барабарсыздыктар) тобундагы теңдемелердин (барабарсыздыктардын) жок дегенде бирин канааттандырган белгисиздин маанилери эсептелери шексиз. Мисалы:

1) $$\left[\begin{array}{l} x-1=0\\ 2(x+5)(x-4)=0\\ (x-3)^2=0 \end{array}\right.$$ теңдемелер тобунун тамырларынын көптүгү болуп

$T=T_1 \cup T_2 \cup T_3=\{1,3,4,-5\}$ көптүгү эсептелет.

2) $$\left[\begin{array}{l} 2x+3>5\\ 7x-12\leq 2 \end{array}\right.$$ барабарсыздыктар тобунун тамырларынын көптүгү болуп

$T=T_1 \cup T_2=]-\infty,\infty[$; эсептелет.

3) $\dfrac{2x+1}{3-x}<0$ барабарсыздыгы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1>0\\ 3-x<0 \end{cases}\\ \begin{cases} 2x+1<0\\ 3-x>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

системалардын дизъюнкциясына тең күчтүү болот. Бул барабарсыздыктардын тобун чыгарып

$T=\{x \mid x\in R,\ x>3$ же $x<-\dfrac{1}{2}\}$ экендигин алабыз.

XI ГЛАВА.

Математикалык анализдин элементтери: функциялар, предел, туунду, интеграл.

1. Сан функциясы жөнүндө түшүнүк.

Жаратылыштагы кубулуштардын жана чоңдуктардын өз ара байланышын чагылдыруучу түшүнүктөрдүн бири– бул функция түшүнүгү. Бул түшүнүк математика үчүн эң маанилүү болуу менен анын негизги тармагы– математикалык анализ үчүн фундаменталдык түшүнүк болуп эсептелет.

Мектеп курсунда сан функциясы жөнүндө көбүрөөк айтылат– бул математика илиминин башка табигый илимдер (физика, биология, химия, ...) менен тыгыз байланышта экендиги менен түшүндүрүлөт.

Функция түшүнүгүнүн маанилүү жана окуучулардын өздөштүрүүсү үчүн татаал болгондугуна байланыштуу, бул түшүнүктү үйрөтүү жана калыптандыруу башталгыч класстардан баштап системалуу түрдө, такай окутууну талап кылат.

Турмуштук төмөнкү эки жагдайды карап көрөлү:

1) Эгер дептердин баасы 2 сом болсо, анда 2,3,4,5,6,7,8,9,10 дептердин наркын тапкыла.

Маселенин мазмунун жана чыгарылышын таблицага түшүрөбүз:

Баасы:	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Саны:	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Наркы:	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Бул маселедеги үч чоңдуктун бири (баасы) турактуу болуп, калган экөө ар түрдүү (өзгөрмө) экендиги көрүнүп турат. Дагы, эске ала турган жагы: дептердин саны өзгөргөндө гана аны «ээрчип» дептердин наркы да өзгөрүп жатат. Ошондой эле, бир эле сандагы дептерлерге белгилүү гана нарк (сумма) туура келет.

Эгер дептердин санын x, наркын y деп белгилесек, анда берилген чоңдуктардын өз ара байланышы (көз карандылыгы) төмөнкү эки белгисиздүү теңдеме түрүндө жазууга болот: $y=2x$

2) Эгер бөлүнүүчү 40 болсо, анда 1,2,5,8,20,40 деген бөлүүчүлөргө тиешелүү болгон тийиндилерди тапкыла.

Бул маселенин шартын жана чыгарылышын да таблицага түшүрөбүз:

Бөлүнүүчү:	40	40	40	40	40	40
Бөлүүчү:	1	2	5	8	20	40
Тийинди:	40	20	8	5	2	1

Бул маселеде– бөлүнүүчү турактуу, бөлүүчүнүн өзгөрүшү тийиндинин өзгөрүшүнө алып келет. Берилген көз карандылыкты эки белгисиздүү теңдеме түрүндө жазсак: $y=40:x$ түрүндө болот. Мында да бир бөлүүчүгө бир гана тийинди туура келет.

Окурманга: Бул эки маселелердеги белгисиз чоңдуктардын өз ара байланышындагы өзгөчөлүккө жана жалпы жагына көңүл буруңуз!

Аныктоо: Эгерде Х көптүгүнөн алынган х өзгөрүлмөсүнүн ар бир маанисине У көптүгүнөн у өзгөрүлмөсүнүн бир гана мааниси туура келсе, анда х жана у өзгөрүлмөлөрүнүн арасындагы мындай көз карандылык функция деп аталат, жана $y=f(x)$, $y=g(x)$, … деп жазылат.

Мында, х–көз каранды эмес өзгөрүлмө же аргумент,
у– көз каранды өзгөрүлмө же функция.

$y=f(x)$ жазуусу– «у өзгөрүлмөсү х тен функция» деп окулат, ал эми х ке туура келүүчү у тин мааниси функциянын мааниси деп аталат.

Х көптүгү– функциянын аныкталуу областы, У көптүгү– функциянын маанилеринин көптүгү. Экинчи маселе үчүн $X=У=\{1,2,5,8,20,40\}$

Ал эми $y=\sqrt{x-5}$ функциясы үчүн

$X=\{x|\ x\in R,\ x\geq5\}$

$У=\{y|\ y\in R,\ y\geq0\}$

Тигил же бул функция берилсин үчүн Х көптүгүнөн алынган ар бир х үчүн, ага тиешелүү болгон у тин маанисин табуу үчүн кандайдыр бир эреже берилиши керек. Анын берилиш жолдору туура келүүчүлүктөгүдөй эле

а) таблица аркылуу,
б) аналитикалык формула менен,
в) график түрүндө берилет.

2. Функциянын графиги.

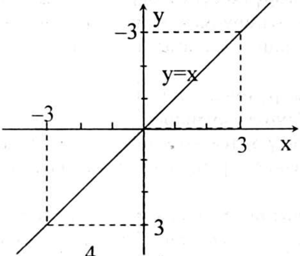
Аныктоо: Х көптүгүндө берилген $y=f(x)$ функциясынын графиги деп Х көптүгүнөн алынган бардык х тер үчүн координаталары х жана у болгон ХОУ тегиздигиндеги чекиттердин көптүгү аталат.

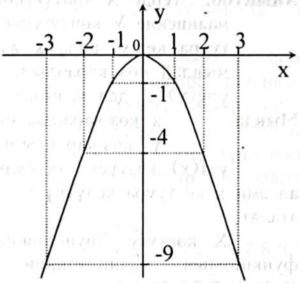
Мисалы:

1) $y=x$. Мында $X=У=]-\infty<x<\infty[$ х тин ар кандай маанисинде у тин мааниси да ошончо болгондуктан, берилген функциянын графиги

абциссасы жана ординатасы дал келген чекиттердин көптүгү болот– бул хоу тегиздигиндеги 1 жана 3 чейректин биссектрисасы болуп эсептелет.

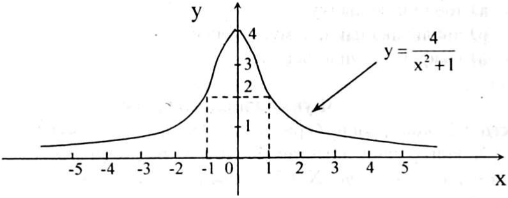
2) $y=-x^2$. Бул функциянын аныкталуу областы анык сандардын көптүгү болсун деп таблица түзүү аркылуу графикке тиешелүү болгон бир нече чекиттерди табабыз да берилген функциянын графигин алабыз– бул бутактары төмөн жакты караган, чокусу координата башталышында болгон парабола болот





3) $y=\dfrac{4}{1+x^2}$. $x\in R$.

x тин эң кичине 0 маанисинде у эң чоң 4 деген маанини кабыл алат, x тин калган маанилеринде у тин мааниси оң болот. у тин эң кичине мааниси жок, себеби x чоңойгон сайын у тин мааниси кичирейип, 0 гө жакын барат (бирок, жетпейт!). Демек, берилген функциянын маанилеринин көптүгү]0;4] болору көрүнүп турат. Айрым чекиттер аркылуу графигин сызсак:



Математикада белгисиздин өз ара көз карандылыгын талдоодо функциянын өсүү жана кемүү касиеттери өзгөчө мааниге ээ.

Аныктоо: Эгер X көптүгүнөн алынган ар кандай x_1 жана x_2 маанилери үчүн $x_1<x_2$ болгондо $f(x_1)<f(x_2)$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясы берилген аралыкта өсүүчү функция деп аталат.

Мисалы, $y=x$ функциясы $]-\infty, \infty[$ аралыгында өсүүчү. Ал эми $y=-x^2$ функциясы $]-\infty, 0[$ аралыгында гана өсүүчү.

Аныктоо: Эгер X көптүгүнөн алынган ар кандай x_1 жана x_2 маанилери үчүн $x_1<x_2$ болгондо $f(x_1)>f(x_2)$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясы берилген аралыкта кемүүчү функция деп аталат.

Мисалы, $y=-x$ функциясы $]-\infty,\infty[$ аралыгында, ал эми $y=-\ x^2$ функциясы $]0,\infty[$ аралыгында гана кемүүчү.

Өсүүчү жана кемүүчү функциялардын графиктеринин өзгөчөлүктөрүн ал сызыктардын чиймеде жайгашуусунан байкоого болот. б.а. ох огу боюнча солдон онго карай жылганда графиктин ординатасы чоноe же кичирейе баштайт. (Чиймелерди жана таблицаларды кара!).

3. Сызыктуу функция жана анын графиги.

Аныктоо: $y=kx+b$ түрүндөгү формула аркылуу берүүгө мүмкүн болгон функция сызыктуу функция деп аталат.

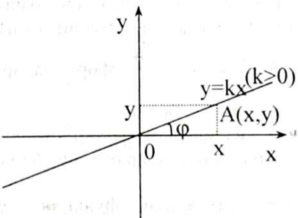
Мында k, b− анык сандар.

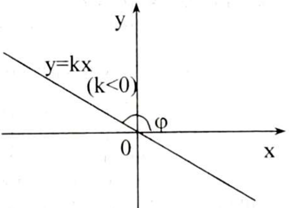
Мисалы: $y=2x-3$, $y=5-2x$, $x+y=0$, …

Эгер $k=0$ болсо, анда $y=b$ деген турактуу функция келип чыгат.

Сызыктуу функция үчүн $X=Y=R$ экендиги анык. Анын графиги дайыма түз сызык болуп, анын абалы k жана b сандарына байланыштуу.

Эгер $b=0$, анда $y=kx$ функциясынын графиктери координата башталышы аркылуу өткөн сызыктардын тобу болот. Эгер ал түз сызык менен ох огунун оң багытындагы бурчту φ деп белгилесек, анда чийме боюнча





$\frac{y}{x}$=tgφ же y=tgφ·x болот. y=kx жана y=tgφ·x функцияларын салыштырып k=tgφ экендигин алабыз. Ошол себептүү k саны берилген сызыктуу функциянын бурчтук коэфициенти деп аталат жана k>0 болгондо функциянын өсүүчү, k<0 болгондо кемүүчү болорун көрсөтөт.

Акыркы айтылыш бардык эле сызыктуу функциялар үчүн чын болот.

Функциянын берилишиндеги b саны y=kx функциясынын графигинин оу огу боюнча b бирдикке жогору (b>0) же төмөн (b<0) жайгашарын билдирет. (Окурман y=2x, y=2x+1, y=2x−3, y=kx+2, … функцияларынын графиктерин бир эле чиймеге түшүрүп, акыркы сүйлөмдүн чын экендигине жана бул функциялардын графиктери өз ара параллель сызыктар болоруна (k=tgφ=2) ишен.

Эгер k санын табуу керек болсо, графикке тиешелүү болгон (x_1,y_1) жана (x_2,y_2) чекиттеринин координаталары аркылуу издөө керек. Б.а. $y_1= kx_1+b$ жана $y_2= kx_2+b$ болгондуктан $y_2-y_1=kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)$ же мындан $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

4. Түз пропорциялаштык жана анын графиги.

Жаратылыштагы эки чоңдуктун арасындагы көз карандылык ар түрдүүчө болушу мүмкүн. Мисалы, бир калыптагы кыймыл учурундагы өтүлгөн жолдун убакытка карата өзгөрүшү. Же бир эле аралыкты басып өтүү үчүн керек болгон кыймылдын ылдамдыгы менен сарпталуучу убакыттын арасындагы көз карандылык.

Биринчи учурда убакыттын көбөйүшү басып өткөн жолдун да чоңоюшуна алып келет, ал эми экинчи учурда болсо тескерисинче, ылдамдык көп болсо убакыт аз, же ылдамдык аз болсо көп убакыт сарпталат. Эгерде бул көз карандылыктарды аналитикалык көрүнүштө функция түрүндө жазсак S=kt жана $t=\frac{k}{V}$ формулалары мектеп курсунан эле белгилүү функциялар пайда болот.

Турмуштук практикада мындай көз карандылыктар өтө көп кездешип, кеңири колдонууга ээ болгондуктан алардын ар бирин айрым-айрым кароого туура келет.

Аныктоо: y=kx формуласы аркылуу берилген функция түз пропорциялаштык деп аталат. Мында x− көз каранды эмес өзгөрүлмө, $k\neq0$– анык сан. k–пропорциялаштык коэфициент.

Окулушу: «у өзгөрмөсү х өзгөрмөсүнө түз пропорциялаш».

Мисалы,

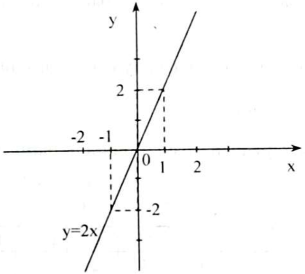
1) Ылдамдыгы саатына 6 км болгон бир калыптагы кыймылдагы нерсенин басып өткөн жолу (S), сарпталган убакытка (t) түз пропорциялаш б.а. $S=6t$.
2) Баасы 2 сом болгон дептердин наркы менен анын саны да түз пропорциялаш. б.а. $y=2x$.

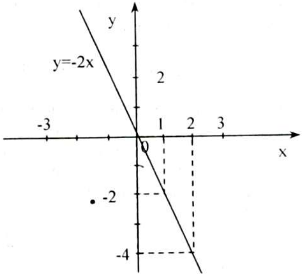
$y=kx$ функциясынын аныкталуу областы– бардык анык сандардын көптүгү болот.

Түз пропорциялаштык $y=kx+b$ сызыктуу функциясынын айрым бир $b=0$ болгондогу учуру болгондуктан:

1) Түз пропорциялаштыктын графиги координата башталышы аркылуу өткөн түз сызык болот;
2) $y=kx$ функциясы х тин ар кандай маанисинде $k>0$ болсо өсүүчү, $k<0$ болсо кемүүчү болот.

Мисалы, $y=2x$ жана $y=-2x$ функцияларынын графиктерин карасак, төмөндөгүдөй болот





Түз пропорциялаштыкта сызыктуу функция ээ болбогон касиет да бар: Эгерде f катнаштыгы түз пропорциялаштык болсо жана х у тин туура келген маанилери $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $x_2\neq0$ болсо, анда $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$. б.а. эгер $y=kx$ болсо, анда х тин эки маанисинин катышы аларга туура келүүчү у тин тиешелүү маанилеринин катышына барабар.

Чындыгында, эгер f катнаштыгы $y=kx$ формуласы менен берилсе, анда аргументтин x_1 жана x_2 маанилери үчүн $y_1=kx_1$ жана

$y_2=kx_2$ болот. Шарт боюнча $x_2 \neq 0$ болгондуктан $y_2=kx_2 \neq 0$ болот. Демек, $\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}$;

x жана y өзгөрмөлөрүнүн оң маанилери үчүн жогорку түз пропорциялаштыктын касиетин төмөнкүчө айтууга болот:

> Эгер x өзгөрмөсү бир нече эсе чоңойсо (кичирейсе), анда аға тиешелүү болгон y тин мааниси да ошондо эсе чоңоет (кичирейет).

5. Тескери пропорциялаштык жана анын графиги.

Аныктоо: $y=\frac{k}{x}$ түрүндөгү формула аркылуу берилген функция тескери пропорциялаштык деп аталат. Мында x– көз карандысыз чоңдук, ал эми $k \neq 0$– анык сан.

Мисалы, өткөн пунктта келтирилген экинчи мисалдагы берилген жолду басып өтүү үчүн сарпталган убакыттын жана керек болгон ылдамдыктын арасындагы көз карандылык– тескери пропорциялаштык.

$y=\frac{k}{x}$ функциясынын аныкталуу областы болуп нөлдөн башка бардык анык сандардын көптүгү эсептелет.

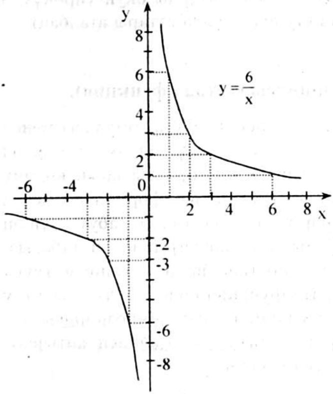
$y=\frac{6}{x}$ жана $y=-\frac{6}{x}$ функцияларынын графиктерин таблицалар түзүү аркылуу сызалы:

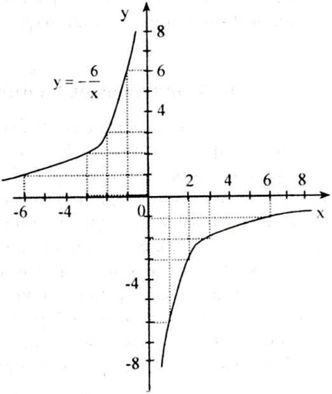
x	1	2	3	6	12
y	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$

x	1	2	3	6	12
y	-6	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Пайда болгон сызыктар гипербола деп аталышат, алардын бутактары координата башталышына карата симметриялуу жайгашышат (себеби, бул функция так). Эгерде x чоңойсо (кичирейсе), анда тиешелүү болгон y тин маанилери азаят (чоңоет). Демек, x тин өтө чоң (кичине) маанилеринде y тин тиешелүү маанилери өтө кичине (чоң) сандар болушары

көрүнүп турат. Ошол себептүү берилген функциянын графиги (гиперболанын бутактары) абцисса жана ордината октору менен чексиздиктерде өтө жакындашат, бирок кесилишпейт. Б.а. абцисса жана ордината октору гипербола үчүн горизонталдык





жана вертикалдык асимптоталар болушат. (Асимптотанын тагыраак аныктоосу кийинчерээк берилет).

Эгерде f тескери пропорциялаштык болсо жана $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$ берилсе, анда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$. Б.а. эгер $y = \frac{k}{x}$ болсо, анда x тин эки маанисинин катышы аларга туура келүүчү у тин маанилеринин тескери катышына барабар.

Чындыгында, эгер f тескери пропорциялаштык болсо, анда x_1 жана x_2 лер үчүн $y_1 = \frac{k}{x_1}$ жана $y_2 = \frac{k}{x_2}$. Шарт боюнча $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $k \neq 0$ болгондуктан

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1} = \frac{x_1}{x_2};$$

x жана у өзгөрүлмөлөрүнүн оң маанилери үчүн тескери пропорциялаштыктын бул касиетин төмөнкүчө айтууга болот:

> Эгер x өзгөрүлмөсүнүн мааниси бир нече эсе чоңойсо (кичирейсе), анда ага тиешелүү болгон у тин мааниси ошончо эсе кичирейет (чоңоет).

Түз жана тескери пропорциялаштыктар менен башталгыч класстардын окуучулары ар түрдүү чоңдуктар менен практикалык маселелер чыгарууда, арифметикалык амалдардын натыйжалары менен компоненттеринин арасындагы байланыштарды окуп үйрөнүүдө таанышышат. Бирок, алар өзүнчө окутулбайт жана аттары аталбайт.

6. Функциялардын композициясы (татаал функция).

Куб формасындагы нерсенин массасы $m=dV$ формуласы менен аныкталары белгилүү. Мында $V-$ кубдун көлөмү, ал эми $d-$ ошол нерсенин тыгыздыгы. Эгер кубдун кыры x болсо, анда анын көлөмү $V=x^3$ болот. Анда берилген нерсенин массасы $m=dx^3$ формуласы менен да аныкталышы мүмкүн. Акыркы формула боюнча m ди табуу үчүн эң мурда V ны таап, андан кийин V ны d га көбөйтүп m ди табабыз. Демек, x тин ар бир мааниси үчүн бир гана m дин мааниси туура келет. Б.а. m өзгөрүлмөсү, x ке карата функция болот. Ушул сыяктуу пайда болгон функцияны берилген функциялардын композициясы деп аташат, же m өзгөрмөсү x ке карата татаал функция деп айтышат. Мындагы V өзгөрмөсү арадагы аргумент болот.

Жалпы учурда эки функциянын композициясы төмөнкүчө аныкталат: X көптүгүндө $y=f(x)$ жана T көптүгүндө $x=\varphi(t)$ функциялары берилсин. Мында $x=\varphi(t)$ функциясынын ар бир мааниси X көптүгүнө тиешелүү болсун. Анда берилген t нын ар бир мааниси үчүн X көптүгүнө тиешелүү болгон x тин маанисин табабыз, ал эми x тин мааниси боюнча y тин мааниси табылат. Демек, T дан алынган ар бир t га туура келүүчү y тин мааниси табылат. Б.а. t га карата y кандайдыр бир жаңы функция болот. Ал функция $y=f(x)$ жана $x=\varphi(t)$ функцияларынын композициясы деп аталып, $y=f[\varphi(t)]$, $t\in T$ деп жазылат. Же $t\xrightarrow{\varphi}x\xrightarrow{f}y$.

Мисалы.

1) $y=3x^3+2x-1$ жана $x=1-4t$ функциялары берилсе, анда ордуна коюу менен $y=3(1-4t)^3+2(1-4t)-1$ деген функциясы пайда болот.

2) $y=\sqrt{x}$ жана $x=-t^2-1$ функциялары үчүн татаал функция аныкталбайт. Себеби, ар кандай t үчүн $x=-(t^2+1)<0$. Ал эми $y=\sqrt{x}$ функциясы $x\geq 0$ үчүн гана аныкталат.

7. Тескери функция.

Маселе:

> Саатына 5 км ылдамдык менен узундугу 100 км болгон жолдо жолоочу бара жатат. Кыймылдын башталышынан t саат өткөндөн кийинки калган жолду тапкыла.

Изделүүчү аралык $S=100-5t$, $0 \le t \le 20$ формуласы менен аныкталары көрүнүп турат. Б.а. [0;20] кесиндисинен алынган каалаган t үчүн S тин маанисин табууга болот.

Эми берилген маселеге тескери маселе түзөлү:

> Саатына 5 км ылдамдык менен узундугу 100 км болгон жолдо жолоочу бара жатат. Эгер жолоочу дагы S км жолду өтүү керек болсо, анда кыймылдын башталышынан бери канча убакыт өттү?

Маселени чыгаруу үчүн $S=100-5t$ формуласынан t ны табабыз:

$$t=\frac{100-S}{5},\ 0 \le S \le 100$$

Пайда болгон функция берилген функцияга тескери функция болот.

Жалпы аныктоосу:

> Айталы $y=f(x)$ функцияга X сан көптүгүнүн R анык сандар көптүгүнө болгон иньективдүү чагылуусун берсин (б.а. ар түрдүү x терге ар башка y тер туура келсин). Функциянын маанилеринин көптүгү У болсун. Анда ар кандай $y_0 \in Y$ үчүн $y_0=f(x_0)$ болгон X көптүгүнөн бир гана x_0 табылат. Мындан, Y көптүгү X көптүгүнө чагылат. б.а. ар кандай $y \in Y$ үчүн $x=\varphi(y)$ функциясы аныкталат. Бул функцияны $y=f(x)$, $x \in X$ функциясына тескери функция деп аташат.

Демек, берилген функцияга тескери функцияны табуу үчүн $y=f(x)$ теңдемесин x ке карата чечүү керек (мында X көптүгүнө тиешелүү болгон гана тамырын алуу керек).

Мисалы:

1. $y=x^2$, $x \in R_+$ функциясы үчүн $x=\sqrt{y}$ функциясы тескери функция болот, себеби, ар түрдүү x тин маанилерине ар башка y тер туура келет.
2. $y=x^2$, $x \in R$ функциясы үчүн тескери функция жок. Себеби, x тин ар түрдүү 4 жана -4 деген маанилерине y тин бир гана 16 деген маанисине, x тин маанисин бир маанилүү тактоого болбойт.

Окурманга: Түз жана тескери функциялардын графиктерин бир эле координата системасына түшүрүп, жыйынтык чыгарууга аракет кылып көр.

8. Удаалаштыктар.

А. Сан удаалаштыктары.

Турмуштук практикада белгилүү бир закон ченеми менен жайгашкан тигил же бул сандардын катарын– удаалаштыгын кездештирүүгө болот.

Мисалы:

1) Класстагы окуучулардын санын жуманын биринчи күнүнөн акыркы күнүнө чейин жазып барсак, анда 30 дан ашпаган (класста 30 окуучу бар болсо) натуралдык сандардын белгилүү бир катары пайда болот: 26, 28, 30, 29, 27, 25. Ал сандардын тартиби жумадагы күндөргө байланыштуу болот. б.а. 26– дүйшөмбү, 29– жума, 25– ишемби, ж.б.
2) Массасы күнүнө эки эсе азайган радиоактивдүү нерсени алсак, анда сандардын төмөнкүчө окшогон катары пайда болот: 48, 24, 12, 6, 3, $1\frac{1}{2}$

Келтирилген эки мисалда тең күндөрдүн номери болгон ар бир n натуралдык санына белгилүү бир сан туура келип жатат (биринчи мисалда– окуучулардын саны, экинчисинде– радиоактивдүү заттын массасы). Мындай туура келүүчүлүк натуралдык сандардын көптүгүндө берилген жана анык сандардын көптүгүндө тиешелүү мааниге ээ болгон функция болору белгилүү.

Аныктоо: Натуралдык сандардын көптүгүндө берилген жана сан маанилерин кабыл алуучу $y=f(n)$ функциясы сан удаалаштыгы деп аталат.Белгилениши: a_1, a_2, a_3, …, a_n, … же кыскача (a_n).

Мисалы:

а) бардык жуп натуралдык сандардын удаалаштыгы: 2, 4, 6, 8, 10, …
б) бардык жөнөкөй сандардын удаалаштыгы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …
в) 2 санынын даражаларынын удаалаштыгы: 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

Келтирилген удаалаштыктардын (а) жана (в) лары үчүн n дин каалаган мааниси үчүн a_n ди таба ала турган n өзгөрүлмөлүү туюнтманы көрсөтүүгө болот. б.а. а) мисалы үчүн $a_n=2n$. Бул туюнтма аркылуу сан удаалаштыгынын n=1,2,3,… болгондогу мүчөлөрү: 2,4,6, … болот. в) мисалы үчүн $a_n=2^n$. Ал эми б) мисалы үчүн мындай туюнтманы жазууга болбойт.

Сан удаалаштыгынын n-чи мүчөсү болгон туюнтма анын жалпы мүчөсү деп аталат. Демек, сан удаалаштыгынын жалпы мүчөсү белгилүү болсо, анын каалаган натуралдык n ге туура келүүчү мүчөсүн табууга болот. Бирок, тескерисинче сан удаалаштыгын биринчи мүчөлөрү аркылуу анын жалпы мүчөсүн табуу дайыма мүмкүн эмес.

Б. Рекуренттүү удаалаштыктар.

Сан удаалаштыгы дайыма эле жалпы мүчөсүнүн туюнтмасы аркылуу берилбейт. Кээде удаалаштыктын биринчи n мүчөсү аркылуу анын n+1-мүчөсүн таба турган эреже берилет. Мындай удаалаштыктар үчүн a_{n+1}-мүчөсүн a_1, a_2, …, a_n-мүчөлөрү аркылуу туюнтуучу формуладан башка да удаалаштыктын бир же бир нече биринчи мүчөлөрү берилген болот. Алардын мүчөлөрүн табууда «аркага» (мурдагы мүчөлөргө) кайрылууга туура келет. Ошол себептүү мындай сан удаалаштыктарын кайтарылма же рекуренттүү удаалыштыктар деп аташат.

Рекуренттүү удаалаштыктардын эң жөнөкөй мисалдары болуп, бизге мектеп курсунан белгилүү болгон арифметикалык жана геометриялык прогрессиялар эсептелишет. б.а.

Аныктоо: Арифметикалык прогрессия деп экинчи мүчөсүнөн баштап, ар бир мүчөсү мурдагы мүчөсүнө бир эле санды кошуудан пайда болгон сан удаалаштыгы аталат.

Ал кошулуучу туруктуу сан прогрессиянын айырмасы деп аталып, d тамгасы менен белгиленет. Демек, эгерде a_1, a_2, … a_n,… удаалаштыгы арифметикалык прогрессия болсо, анда ар кандай n үчүн $a_{n+1}=a_n+d$ же $a_{n+1}-a_n=d$.

Мисалы,

1) a_n: ÷ 3, 5, 7, 9, 11, 13, … d=2

2) b_n: ÷ 7, 6, 5, 4, 3, … d=−1.

Мисалдардан d>0 болгондо арифметикалык прогрессия монотондуу өсүүчү, ал эми d<0 болгондо монотондуу кемүүчү болору көрүнүп турат.

Арифметикалык прогрессияны берүү үчүн анын айырмасы менен биринчи мүчөсүнүн берилиши керек. Экинчи мүчөсүнөн баштап ар бир кийинки мүчөсү алдынкысына айырманы кошуу менен табууга болот. Бирок, мындай ыкма бир кыйла ыңгайсыз– өтө көп кошуу амалдарын аткарууга туура келет. Ошол себептүү арифметикалык прогрессиянын каалаган n-мүчөсү үчүн формула келтирип чыгарабыз. б.а. аныктоо боюнча

$a_2=a_1+d$
$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$
$a_4=a_3+d=(a_2+d)+d=a_1+3d$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d \qquad (1)$$

(1) формуланын туура экендигин индукция методу менен оңой эле далилдөөгө болот.

Падыша шахматты ойлоп тапкан кишиге өтө ыраазы болуп, айтканыңды берем дегенде, ал акылман: шахмат доскасынын биринчи клеткасы үчүн бир даана, экинчиси үчүн 2, үчүнчүсү үчүн 4, төртүнчүсү үчүн 8, ж.б. ар бир кийинки клетка үчүн мурдагыдан эки эсе көп даана буудай сураган экен. Пайда болгон 1, 2, 4, 8, ...2^{63} удаалаштыгынын мүчөлөрүнүн суммасына барабар сандагы буудай падышанын казынасында жок болуп чыккан экен.

Аныктоо: Экинчи мүчөсүнөн баштап ар бир мүчөсү мурдагысын бир эле санга көбөйтүүдөн пайда болгон нөлдүк эмес сан удаалаштыгы геометриялык прогрессия деп аталат.

Ал турактуу сан прогрессиянын бөлүмү деп аталат. Геометриялык прогрессиянын рекуренттик формуласы $a_{n+1}=a_n\cdot q$ болот. Мында q прогрессиянын бөлүмү.

Прогрессиянын биринчи мүчөсү жана бөлүмүнө карата геометриялык прогрессиянын төмөнкү айрым учурлары болушу мүмкүн.

а) $q>1$, $a_1>0$. Бул учурда прогрессиянын ар бир кийинки мүчөсү мурдагысынан чоң болот.

Мисалы: 1, 2, 4, 8, 16, ... $q=2$

б) $q>1$, $a_1<0$. Мындай прогрессиянын бардык мүчөлөрү терс болуп, модулдары боюнча өсүүчү удаалаштыкты түзөт. *Мисалы*: −3, −6, −12, −24, ... $q=2$

в) $0<q<1$, $a_1>0$. Бул учурда удаалаштыктын мүчөлөрү оң, бирок номери чоңойгон сайын кичирейип, нөлгө жакындайт. *Мисалы*:

32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... $q=\frac{1}{2}$

г) $q=1$ болсо прогрессиянын бардык мүчөлөрү бирдей болот. *Мисалы*: 5, 5, 5, 5, ... $q=1$

d) $q=-1$ болсо, прогрессиянын мүчөлөрү ар бир кадам сайын белгисин гана алмаштырат.

Мисалы: 7, −7, 7, −7, 7, ... $q=-1$

е) $q<-1$. Бул учурда прогрессиянын мүчөлөрү белгиси алмашып, модулу боюнча өсүп барат.

ж) $-1<q<0$. Мында мүчөлөрүнүн белгиси алмашып, модулу боюнча кичирей берет.

Мисалы. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ $q=-\frac{1}{2}$

Арифметикалык прогрессияныкы сыяктуу эле геометриялык прогрессиянын да жалпы мүчөсүнүн формуласын келтирип чыгарууга болот: $a_n=a_1q^{n-1}$;

Эстеп калуу үчүн XIII кылымда жашаган италиялык математик Фибоначчинин атынан коюлган удаалаштыкты беребиз. Анын рекуренттик формуласы $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Эгер $a_1=a_2=1$ болсо, анда $a_3=2$, $a_4=a_3+a_2=3$, $a_5=a_4+a_3=3+2=5$, … Демек, Фибоначчинин сандары болуп төмөнкү сандардын удаалаштыгы эсептелет: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

В. Чексиз чон жана чексиз кичине удаалаштыктар.

Эгерде натуралдык сандардын удаалаштыгын

1, 2, 3, 4, …, n, …

карап көрсөк, анда анын монотондуу өскөндүгүн жана анын мүчөлөрүнүн барган сайын чоңое бергендигин байкайбыз. Мисалы, бул катардан 1000 санын алсак, анда 1001- номеринен баштап удаалаштыктын мүчөлөрү берилген сандан чоң болушат. Ал эми 1000001-номеринен баштап миллиондон чоң болушат. Жалпысынан алганда, кандай гана чоң М санын албайлы, ошол номерден баштап берилген сандан чоң болгон, кандайдыр номер табылат.

Жогоркудай эле касиетке 1, 4, 9, 16, …, n^2, … удаалаштыгы да ээ болот. Мисалы, 1000000 саны берилсе $1000^2=1000000$ болот, анда 1001-номерден баштап $n^2>1000000$ барабарсыздыгы аткарылат. Мындай удаалаштыктарды дайыма өсүүчү же $+\infty$ ге умтулуучу удаалаштыктар деп коюшат. Б.а. эгерде ар кандай $M>0$ саны үчүн, ошол номерден баштап, удаалаштыктын бардык мүчөсү үчүн $a_n>M$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай N номери табылса, анда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удаалаштыгы плюс чексизге умтулат. Мында удаалаштыктын бардык мүчөлөрү монотондуу өсүшү шарт эмес. Мисалы: 1, 1, 2, 4, 3, 9, 4, 16, … удаалаштыгында натуралдык сандар өздөрүнүн квадраттары менен жанаша келгендигине карабастан монотондуу өсүүчү эмес. Бирок ал $+\infty$ ге умтулат, себеби анын мүчөлөрү мурда берилген каалаган сандан чоң болушат. Мисалы, 2000-мүчөсүнөн кийин $a_n>1000$, ал эми 2000000-мүчөсүнөн кийин $a_n>1000000$ барабарсыздыктары аткарылат.

Эгер $+\infty$ ге умтулган удаалаштыктын мүчөлөрүнүн белгилерин алмаштырып койсок, анда $-\infty$ ге умтулган удаалаштык келип чыгат. Мисалы: $-1,-4,-9,-16,\ldots,-n^2,\ldots$ удаалаштыгы $-\infty$ ге умтулат. Эгер удаалаштыктын мүчөлөрүнүн номери жогорулаган сайын ал +∞ ге же −∞ ге умтулса анда аларды $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ деп жазышат. Айрым удаалаштыктар +∞ ге да −∞ ге да умтулушпайт. Мисалы: 1, −4, 9, −16, 25, −36, …, $(-1)^{n-1}n^2$, … удаалаштыгы жогоркуга мисал болот. Эгер анын бардык мүчөлөрүн алардын модулдары менен алмаштырсак, анда +∞ ге умтулган 1, 4, 9, 16, 25, 36, … деген удаалаштык пайда болот. Бул учурда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ деп жазылат да, удаалаштык <u>чексиз чоң</u> деп аталат. Б.а. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$ болгондо гана a_1, a_2, …, a_n,… удаалаштыгы чексиз чоң болот. Ошондой эле $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ болсо, анда (a_n) удаалаштыгын чексиз чоң деп айтууга болору ачык.

Оң бөлчөктүн бөлүмү чоң болгон сайын бөлчөктүн мааниси кичирейип барышы анык. Бөлүмдүн өтө чоң маанисинде бөлчөктүн мааниси өтө кичине болот. (мисалы, эгер n>1000000 болсо, анда $\frac{1}{n}<0{,}000001$). Мындан, эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ болсо, анда $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ удаалаштыгы <u>чексиз кичине</u> болот. Тагыраак айтканда, каалагандай кичине ε>0 санын албайлы, ошол номерден баштап, $\frac{1}{a_n}<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай, N номери табылат. Эгер удаалаштыктын мүчөлөрү, оң болсун деген шартты алып таштасак, анда $\frac{1}{a_n}<\varepsilon$ барабарсыздыгынын ордуна $\left|\frac{1}{a_n}\right|<\varepsilon$ деп жазуу керек.

Аныктоо: Эгер каалагандай ε>0 саны үчүн, ошол номерден баштап, $|\alpha_n|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай N номери табылса, анда α_1, α_2,…, α_n,… удаалаштыгы <u>чексиз кичине удаалаштык</u> деп аталат.

Төмөнкү теореманын туура экендиги да ачык:

Эгер a_1, a_2, …, a_n,… удаалаштыгы чексиз чоң болсо, анда $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, …, $\Big|\Big|\frac{1}{a_n}$, … удаалаштыгы чексиз кичине. Тескерисинче, эгер

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ удаалаштыгы чексиз кичине болсо, анда $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$, …, $\frac{1}{\alpha_n}$, … удаалаштыгы чексиз чоң. (мында $\alpha_i \neq 0$, $i=1,2,\ldots, n,\ldots$).

Мисалы, $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ удаалаштыгы чексиз кичине ал эми $1, -2, 3, -4, \ldots$ удаалаштыгы болсо чексиз чоң.

Эгер бардык n үчүн $|a_n| \le M$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай M саны табылса, анда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удаалаштыгы <u>чектелген</u> удаалаштык деп аталат. Мисалы, жалпы мүчөсү $a_n = \frac{6}{1+n^2}$ болгон удаалаштык чектелген, себеби бардык n үчүн $1+n^2>1$ болгондуктан $|a_n| < \frac{6}{1} = 6$. Ошондой эле $1, -1, 1, -1, \ldots$ удаалаштыгы да чектелген, себеби бардык n үчүн $|a_n|=1$.

Берилген удаалаштыктын чексиз кичине экендигин текшерүү үчүн төмөнкү анык теоремаларды пайдаланууга болот:

1. Эгер (α_n) жана (β_n) удаалаштыктары чексиз кичине болушса, анда алардын суммасы $(\alpha_n+\beta_n)$ да чексиз кичине.
2. Эгер (α_n) удаалаштыгы чексиз кичине, ал эми (a_n) удаалаштыгы чектелген болсо, анда $(a_n\alpha_n)$ удаалаштыгы да чексиз кичине. Ошондой эле чексиз кичине удаалаштыктардын көбөйтүндүсү да чексиз кичине болот.

<u>Мисал-1</u>: Жалпы мүчөсү $\frac{n^2+4}{n^3}$ болгон удаалаштык чексиз кичине.

Себеби ал чексиз кичине удаалаштыктардын суммасы болот. б.а.

$$a_n = \frac{n^2}{n^3} + \frac{4}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{4}{n^3};$$

<u>Мисал-2</u>: Жалпы мүчөсү $\frac{n}{n^2+9}$ болгон удаалаштык да чексиз кичине. Чындыгында $a_n = \frac{n}{n^2\left(1+\frac{9}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{9}{n^2}}$;

Мында $(\frac{1}{n})$ удаалаштыгы чексиз кичине, ал эми $\frac{1}{1+\frac{9}{n^2}}$ удаалаштыгы ар кандай n үчүн чектелген. б.а. $\frac{1}{1+\frac{9}{n^2}}<1$. Демек, жогорудагы экинчи сүйлөм боюнча берилген $\frac{n}{n^2+9}$ удаалаштыгы чексиз кичине.

Төмөнкү айтылыш аркылуу тигил же бул удаалаштыктын чексиз кичине экендигин оңоюраак тактоого болот: Эгер $\alpha_n=\frac{a_k n^k+...+a_0}{b_l n^l+...+b_0}$ жана k<l болсо, анда (α_n) удаалаштыгы чексиз кичине.

Мисалы, $\alpha_n=\frac{3n^2-4n+5}{6n^4+3n-9}$ удаалаштыгы чексиз кичине.

Г. Удаалаштыктын предели.

Жалпы мүчөсү $a_n=\frac{n^2+9}{n^2+4}$ болгон удаалаштык чексиз кичине эмес. Бул туюнтманы өзгөртүп түзүп $a_n=1+\frac{5}{n^2+4}$ түрүнө келтирүүгө болот. Удаалаштыктын мүчөлөрүнүн номери өтө чоң болгондо $\frac{5}{n^2+4}$ түн мааниси өтө кичине болот– бул берилген удаалаштыктын мүчөлөрү 1 ден өтө аз айырмаланат дегендикке жатат. Бул учурда (a_n) удаалаштыгынын <u>предели</u> бирге барабар деп айтышат жана аны төмөнкүчө жазышат:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+9}{n^2+4}=1$$

(lim– латындын limes– «предел» деген сөзүнөн алынган).

<u>Аныктоо</u>: Эгер жалпы мүчөсү $\alpha_n=a_n-a$ болгон удаалаштык чексиз кичине болсо, анда $a_1,a_2,...,a_n,...$ удаалаштыгынын предели a болот жана $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ деп жазылат.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ деген ар кандай чексиз кичине удаалаштыктын предели нөлгө барабар, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Чексиз кичине удаалаштыктардын касиеттеринен эсептөөнү жеңилдетүүчү пределдин төмөнкү касиеттери келип чыгат:

1. Эгер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$ жана $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.
2. Эгер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $b\neq 0$ жана бардык $b_n\neq 0$ болсо, анда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b};$$

Эгер (a_n) удаалаштыгы туруктуу болсо, б.а., анын бардык мүчөлөрү бир эле санга барабар болсо $a_n = c$, анда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

Мисал-1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{4n^2+6n+7}$ пределин табуу үчүн бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн n^2 ка бөлүп, жогорку касиеттерди пайдаланабыз. б.а.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{4n^2+6n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{3+0-0}{4+0+0} = \frac{3}{4};$$

Жогорку мисалга негиздеп:

Эгер удаалаштыктын жалпы мүчөсү бөлчөк болуп, анын алымы жана бөлүмү бирдей даражага ээ болгон n ден көп мүчө болсо, анда бул удаалаштыктын предели чоң мүчөлөрдүн коэфициенттеринин катышына барабар:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + \dots + a_k}{b_0 n^k + \dots + b_k} = \frac{a_0}{b_0};$$

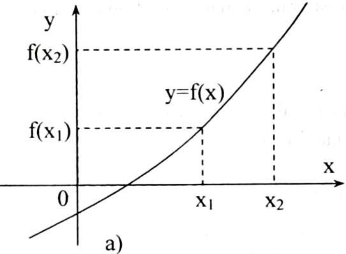
Мисалы: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^4-n^3+5}{3n^4+n^2-7n+1} = \frac{6}{3} = 2$

9. Функциянын предели

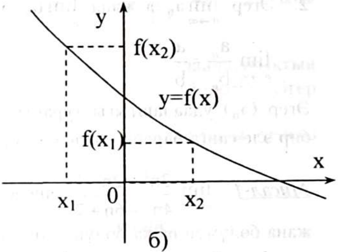
А. Функциянын өсүшү жана кемиши.

Төмөнкү чиймедеги эки түрдүү функциялардын графиктерин карап көрөлү:

Эгер x тин мааниси солдон оңго карай барган сайын чоңойсо, анда ага тиешелүү болгон функциянын мааниси биринчи учурда чоңоерун, ал эми экинчи учурда азаярын байкайбыз.



а)



б)

Математикада биринчи түрдөгү функцияларды бардык сан огунда <u>өсөт</u>, ал эми экинчи түрдөгү функцияларды <u>кемийт</u> деп айтышат.

<u>Аныктоо</u>: Эгер y=f(x) функциясы X көптүгүндө берилип $x_1<x_2$ болгондо $f(x_1)<f(x_2)$ болсо өсүүчү, $x_1<x_2$ болгондо $f(x_1)>f(x_2)$ болсо кемүүчү функция деп аталат. Б.а., эгер чоң аргументке чоң функция туура келсе, анда функция өсүүчү, ал эми чоң аргументке кичине функция туура келсе– кемүүчү болот (графиктерди кара!).

Мисалы, $y=x^3$ функциясы дайыма өсүүчү, ал эми $y=-x^2$ функциясы $]0;\infty[$ аралыгында кемүүчү, $]-\infty;0[$ аралыгында өсүүчү.

Функциялардын өсүшүн жана кемишин изилдөө барабарсыздыктардын касиеттерине негизделген, б.а.

1. Эгер y=f(x) жана y=g(x) функциялары X те өсүүчү болсо, анда алардын суммасы y=f(x)+g(x) да X те өсүүчү болот.

   Чындыгында, X көптүгүнөн $x_1<x_2$ болгон x_1 жана x_2 сандарын алсак, анда аныктоо боюнча $f(x_1)<f(x_2)$ жана $g(x_1)<g(x_2)$ болот. Барабарсыздыктын касиети боюнча $f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$ экендиги келип чыгат.

Бул y=f(x)+g(x) функциясы да өсүүчү болорун билдирет.

2. X көптүгүндө $y=f(x)$ функциясы өсүүчү болсо, анда ушул эле көптүктө $y=-f(x)$ функциясы кемүүчү болот.

Эгер $x_1,x_2 \in X$ берилип, $x_1<x_2$ болгондо $f(x_1)<f(x_2)$ болот. Барабарсыздыктын касиети боюнча $-f(x_1)>-f(x_2)$ болгондуктан $y=-f(x)$ функциясы ошол эле X те кемүүчү функция болот.

3. Эгер $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары X көптүгүндө маанилери оң болуп, өсүүчү функциялар болушса, анда $y=f(x)g(x)$ функциясы да X те өсүүчү функция болот.

Чындыгында $x_1,x_2 \in X$, $x_1<x_2$ болсо, анда $0<f(x_1)<f(x_2)$ жана $0<g(x_1)<g(x_2)$ болот. Анда бизге белгилүү болгон касиет боюнча $0<f(x_1)g(x_1)<f(x_2)g(x_2)$– бул $y=f(x)g(x)$ функциясынын X те өсүүчү экендигин ырастайт.

4. Эгер $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары X те өсүүчү болуп, маанилери терс болсо, анда $y=f(x)g(x)$ функциясы X те кемүүчү болот.

Далилдөөсү мурдагыларга окшош оңой эле жүргүзүлөт.

5. Эгер $y=f(x)$ функциясы X те өсүүчү болуу менен өз белгисин сактаса, анда $y=\frac{1}{f(x)}$ функциясы X те кемүүчү функция болот.

Чындыгында, эгер $x_1<x_2$ болсо, анда $0<f(x_1)<f(x_2)$ же $f(x_1)<f(x_2)<0$ болот. Мындан $\frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)}$, б.а. $y=\frac{1}{f(x)}$ функциясы кемүүчү.

Мисал-1: $y=x^2$ функциясынын өсүү жана кемүү касиеттерин карап көрөбүз.

Бул функция $y=x$ жана $y=x$ деген өсүүчү эки функциялардын көбөйтүндүсүнөн турат. Ошондой эле $x>0$ болгондо оң, ал эми $x<0$ болгондо терс маанилерди кабыл алат. Ошондуктан 3-4-касиеттер боюнча $x>0$ болгондо өсөт, $x<0$ болгондо кемийт.

Мисал-2: $y=\frac{4}{x^2+1}$ функциясынын өсүүсүн жана, кемүүсүн изилдейли.

$y=x^2$ функциясы $x>0$ болгондо өсүүчү, $x<0$ болгондо кемүүчү болгондуктан, $y=x^2+1$ функциясы да $x>0$ болгондо өсүүчү, $x<0$ болгондо кемүүчү болот. Экинчиден, берилген функция дайыма оң.

Ошондуктан, 5-касиет боюнча $y=\frac{4}{x^2+1}$ функциясы $x<0$ болгондо өсүүчү, ал эми $x>0$ болгондо кемүүчү болот.

Б. Чектелген жана чектелбеген функциялар.

$y=x^2$ функциясынын графиги $-2\le x\le 3$ тилкечесинде толук жайгашып, абцисса огуна параллель болгон $y=0$ жана $y=9$ түз сызыктары менен чектелген болот. Мындай функцияны $[-2,3]$ кесиндисинде чектелген функция дешет. Ал эми $]-\infty,\infty[$ аралыгында берилген функция чектелген эмес. Себеби, ох огуна параллель болгон түз сызык жүргүзсөк, бул түз сызыктардын арасында жатпаган графиктин чекиттерин табууга болот.

Ошондой эле $y=\frac{1}{x}$ функциясы да $]0,1]$ аралыгында чектелген эмес. Себеби, $x=0$ чекитине жакындаган сайын анын графиги абцисса огунан алыстай берет. (Графиктеринен карап, текшер!).

Аныктоо: Эгер $y=f(x)$ функциясы үчүн бардык $x\in X$ терге $a\le f(x)\le b$ барабарсыздыгы аткарыла турган a жана b сандары табылса, анда ал функция чектелген функция деп аталат. (бул– берилген функциянын графиги $y=a$ жана $y=b$ түз сызыктары менен чектелген тилкечеде толугу менен жайгашкандыгын билдирет).

Эгерде каалаган a жана b, $a<b$ үчүн $f(x)<a$ же $f(x)>b$ боло турган $x\in X$ табылса анда $y=f(x)$ функциясы X көптүгүндө чектелбеген функция болот.

$a\le f(x)\le b$ шартындагы a жана b сандарын бири-бирине карама-каршы кылып тандап алууга болот. Мисалы, эгер бардык $x\in X$ тер үчүн $-2\le f(x)\le 5$ болсо, анда $-5\le f(x)\le 5$ болору айдан ачык. Бирок, $-c\le f(x)\le c$ барабарсыздыгы $|f(x)|\le c$ барабарсыздыгы менен тең күчтө. Ошол себептүү, X тең алынган бардык x тер үчүн $|f(x)|\le c$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай c саны табылган учурда гана $y=f(x)$ функциясы X көптүгүндө чектелген функция болот.

Мисал-1: $y=\frac{4}{1+x^2}$, $x\in R$ функциясы чектелген. Себеби, $\frac{4}{1+x^2}>0$ жана $1+x^2\ge 1$, демек, $\frac{4}{1+x^2}\le 4$.

Мисал-2: $y=\frac{4}{x^2-16}$, $x\neq\pm4$ функциясы чектелген эмес. Себеби, x тин маанилери −4 жана 4 сандарына жакындаса, берилген функциянын графиги абцисса огунан чексиз алыстайт.

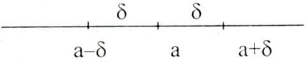
В. Чексиз кичине функциялар.

$y=(x-4)^2$ функциясы x=4 болгондо нөлгө барабар болот. Эгер x тин 4 кө өтө жакын маанилериндеги функциянын маанилерин аныктасак, анда алар нөлгө жакын болгон өтө кичинекей сан болот.

Мисалы, эгер $|x-4|<0.1$ болсо, анда $|x-4|^2<0.01$, б.а. $(x-4)^2<0.01$ болот. $|x-4|<0.1$ барабарсыздыгын $-0.1<x-4<0.1$ же $3.9<x<4.1$ түрүндө жазууга болот.

Демек,]3.9;4.1[аралыгынан алынган ар кандай x үчүн $(x-4)^2<0.01$. Ошондой эле]3.999;4.001[аралыгындагы ар бир x үчүн $(x-4)^2<0.000001$ экендигин, ал эми]3.999999;4.000001[аралыгында $(x-4)^2<0.000000000001$ болорун да далилдөөгө болот.

Жалпысынан алганда, ε үчүн канчалык гана кичине сан албайлы (ε=0.01; 0.000001; 0.000000000001), $(x-4)^2<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла турган, борбору 4 чекити болгон аралык табылат.]a−δ; a+δ[аралыгы борбору a чекити жана радиусу δ болгон a чекитинин чөйрөсү деп аталат.



Демек, ар кандай кичине ε>0 саны үчүн $(x-4)^2<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай 4 чекитинин чөйрөсү табыла тургандыгына ишендик. Мындай учурда x 4 санына умтулганда $y=(x-4)^2$ функциясын чексиз кичине деп аташат. Эгер $y=\frac{(x-4)^2}{x^2-7x+12}$ функциясында x=4 санын койсок, анда анын алымы да, бөлүмү да нөл болору көрүнүп турат. Ал эми x тин 4 кө жакын маанилериндеги функциянын маанилери нөлгө жакын болору төмөнкү таблицадан байкалат:

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{99}$	$-\frac{1}{999}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{999}$

Аныктоо: Эгер ар кандай ε>0 саны үчүн бардык чекиттеринде (айрым учурда a чекитинен башка)$|f(x)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай а чекитинин чөлкөмүн көрсөтүүгө мүмкүн болсо, анда $y=f(x)$ функциясы $x \to a$ болгондо <u>чексиз кичине</u> болот.

Чексиз кичине функциянын эң жөнөкөй мисалы болуп $y=x-a$ функциясы $x \to a$ болгондо эсептелет. Берилген $\varepsilon>0$ саны үчүн радиусу ε болгон а чекитинин чөлкөмүн алуу жетиштүү. Мында $|x-a|<\varepsilon$ болот, демек, $|f(x)|<\varepsilon$.

Чексиз кичине функциялар үчүн төмөнкү теоремаларды далилдөөсүз кабыл алабыз:

1. $x \to a$ болгондогу чексиз кичине функциялардын суммасы да чексиз кичине.
2. Эгер $x \to a$ болгондо $\alpha(x)$ функциясы чексиз кичине, ал эми $y=f(x)$ функциясы а чекитинин чөлкөмүндө чектелген болсо, анда $x \to a$ болгондо $y=f(x)\alpha(x)$ функциясы да чексиз кичине болот.

Ар кандай $y=\alpha(x)$ функциясы $x \to a$ болгондо, чексиз кичине болгон функция ошол чекиттин чөлкөмүндө чектелген болот (себеби, ошол чөлкөмдө $|\alpha(x)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат). Ошондуктан 2-теоремадан: $x \to a$ болгондо чексиз кичине болгон функциялардын көбөйтүндүсү да $x \to a$ болгондо, чексиз кичине болот– деп жыйынтык чыгарууга болот.

<u>Мисал-1</u>: $y=x-a$ функциясы $x \to a$ болгондо чексиз кичине болгондуктан, $y=(x-a)^n$, $n \in N$ функциясы да $x \to a$ болгондо чекиз кичине болот. Чындыгында, $|x-a|<\sqrt[n]{\varepsilon}$ болгондуктан, $|x-a|^n<\varepsilon$ болот, б.а. $a-\delta<x<x+\delta$ болгондо ($\delta=\sqrt[n]{\varepsilon}$) $|x-a|^n<\varepsilon$ болот.

<u>Мисал-2</u>: $y=A_1(x-a)+\ldots+A_n(x-a)^n$ түрүндөгү ар кандай функция чексиз кичине. Анткени анын кошулуучулары болгон $A_k(x-a)^k$ көбөйтүндүлөр $x \to a$ болгондо– чексиз кичине функциялар.

<u>Мисал–3</u>: $y=\sqrt[3]{x-a}$ функциясы $x \to a$ болгондо, чексиз кичине функция болот. Чындыгында эле $\left|\sqrt[3]{x-a}\right|<\varepsilon$ барабарсыздыгы $|x\text{-}a|<\varepsilon^3$ б.а. $a-\varepsilon^3<x<a+\varepsilon^3$ болгондо аткарылат.

<u>Мисал–4</u>: Эгер $a\neq0$ болсо, анда $y=\dfrac{x-a}{ax}$ функциясы $x \to a$ болгондо чексиз кичине. Бул айтылышты далилдөө үчүн $y=\dfrac{1}{ax}$ функциясынын а чекитинин кандайдыр бир чөлкөмүндө чектелген болушун далилдөө жетиштүү. Мындай чөлкөм үчүн $a>0$ болгондо,

$\left]\frac{a}{2};\frac{3a}{2}\right[$ чөлкөмүн алууга болот. Бул чөлкөмдө $\frac{2}{3a^2}<\frac{1}{ax}<\frac{2}{a^2}$, ошол себептүү $y=\frac{1}{ax}$ функциясы чектелген. $a<0$ болгон учур да ушундай эле жол менен такталат.

Г. Чекиттеги функциянын предели

$y=x^2+1$ функциясы $x\to3$ болгондо чексиз кичине болбойт. Мисалы $x=3.01$ болсо, анда $y=10.0601$ болот. Бул функциянын аналитикалык көрүнүшүн өзгөртүп жазабыз:

$$y=10+(x^2-9)=10+(x-3)(x+3).$$

Мындагы $(x-3)(x+3)$ кошулуучу $x\to3$ болгондо чексиз кичине. Ошол себептүү x тин мааниси 3 төн өтө аз айырмаланганда, функциянын мааниси 10 дон бир аз эле айырмаланат. Мындай учурда $x\to3$ болгондогу функциянын предели 10 болот деп айтышат жана $\lim\limits_{x\to3}(x^2+1)=10$ деп жазышат. Жалпы учурда, эгер $y=f(x)$ функциясын b саны менен $x\to a$ болгондогу чексиз кичине $y=\alpha(x)$ функциясынын суммасы түрүндө жазууга мүмкүн болсо б.а., $y=b+\alpha(x)$, анда b саны $x\to a$ болгондогу $f(x)$ функциясынын предели деп аталат жана $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ деп жазылат.

Чексиз кичине функциялардын касиеттеринен пределдердин төмөнкү касиеттери келип чыгат:

1^0 $\lim\limits_{x\to a}C=C$, $C-\text{const}$.

2^0. Эгер $x\to a$ болгондо, $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары пределдерге ээ болушса, анда алардын суммасы жана көбөйтүндүсү да $x\to a$ болгондо пределге ээ болушат да

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x) \text{ болот.}$$

б.а. сумманын предели, пределдердин суммасына, ал эми көбөйтүндүнүн предели пределдердин көбөйтүндүсүнө барабар.

3^0. Эгер $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары $x\to a$ болгондо, пределдерге ээ болуп, экинчи предел нөлдөн айырмаланган болсо, анда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)};$$

Мисал–1: Берилген пределдерди табалы.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+10}{2x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+10)}{\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-1)}=\frac{(\lim\limits_{x\to 5}x)^2+10}{2(\lim\limits_{x\to 5}x)^2-1}=\frac{5^2+10}{2\cdot 5^2-1}=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$$

Эгер x=a чекитинде бөлчөктүү-рационалдык функциянын бөлүмү нөл болуп, алымы нөлдөн айырмаланган болсо, анда x тин a га жакындашы менен функциянын модулу боюнча мааниси өтө чоң болуп кетет. Бул учурда x→a болгондо функция чексиз чоң деп аташат жана $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ деп жазышат.

Мисалы, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x^2-4}=\infty$

Эгер x=a болгондо, бөлчөктүн алымы да, бөлүмү да нөл болсо, анда анын алымын жана бөлүмүн x–a га кыскартуу менен теңдеш өзгөртүп түзүү керек. Б.а.,

Мисал–2: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-4)}=-6$

Д. Функциянын чексиздеги предели

Эгер x>0 болсо, анда x тин маанилеринин өсүшү менен $y=\frac{1}{x}$ функциясынын маанилери улам барган сайын азайышы бизге белгилүү. Бул ойду бир аз башкача да берүүгө болот: канчалык кичине болгон ε>0 санын албайлы, $\frac{1}{N}<\varepsilon$ боло турган N дин мааниси табылып, x>N боло турган $y=\frac{1}{x}$ функциясынын бардык маанилери ε дон кичине болот. Бул учурда $y=\frac{1}{x}$ функциясы x→+∞ болгондо чексиз кичине функция болот деп айтышат жана $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ деп жазылат. x→+∞ болгондо, $y=-\frac{1}{x}$ функциясы да чексиз кичине, бирок маанилери терс. Ошол себептүү $\frac{1}{x}<\varepsilon$ деп жазуунун ордуна $|\frac{1}{x}|<\varepsilon$ деп жазуу керек.

Аныктоо: Эгер каалаган $\varepsilon>0$ саны үчүн $x>N$ боло турган N саны табылып, бардык x тер үчүн $|f(x)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда $y=f(x)$ функциясы x→+∞ болгондогу чексиз кичине функция деп аталат.

Бул сүйлөмдү математикалык символикаларды пайдаланып төмөнкүчө жазууга болот:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ N,\quad \forall x>N\ |f(x)|<\varepsilon$$

Чексиз кичине функцияга радиокативдүү нерсенин массасынын убакытка карата болгон көз карандылыгы ачык мисал боло алат. Айталы, ар бир сутка сайын ал нерсенин массасынын жарымы ажырап жок болсун. Анда канчалык кичине болгон $\varepsilon>0$ санын албайлы, ошол күндөн баштап, берилген нерсенин массасы ε дон кичине боло турган N деген күн келет.

Жогоруда $y=\frac{1}{x}$ функциясы x→+∞ болгондо, чексиз кичине экендигин көрдүк. Ал функция x→−∞ болгондо да чексиз кичине болот. Мисалы, $x=-1000000$ болсо, анда $\frac{1}{x}=-0{,}000001$ болот, бул сан 0 дөн айырмасы жокко эсе. x тин терс мааниси модулу боюнча канчалык чоӊ болсо, $\frac{1}{x}$ туюнтмасынын мааниси нөлгө ошончолук жакын болот. Бул− $y=\frac{1}{x}$ функциясы x→−∞ болгондо, чексиз кичине экендигин билдирет. Бул функция x→+∞ жана x→−∞ болгон учурларда чексиз кичине болгондуктан, аны жөн гана чексиз кичине функция деп коюшат (чексиздиктин белгисин тактабай эле).

Берилген функциянын x→+∞ болгон учурдагы чексиз кичине экендигин текшерүү үчүн төмөнкү теоремаларды пайдаланышат:

1. Эгер $y=\alpha(x)$ жана $y=\beta(x)$ функциялары x→+∞ болгондо чексиз кичине болсо, анда алардын суммасы $y=\alpha(x)+\beta(x)$ функциясы да x→+∞ болгондо чексиз кичине функция болот.

2. Эгер $y=\alpha(x)$ функциясы $x\to+\infty$ болгондо чексиз кичине, ал эми $y=f(x)$ функциясы $[a;+\infty[$ шооласында чектелген болсо, анда $y=f(x)\alpha(x)$ функциясы $x\to+\infty$ болгондо чексиз кичине болот.Ар кандай кичине функция чектелген болгондуктан, ($x>N$ болгондо $|\alpha(x)|<\varepsilon$) жогоруда берилген 2-теоремадан: эки чексиз кичине функциялардын көбөйтүндүсү да чексиз кичине болот деп айтууга болот.

3. Эгер $y=f(x)$ функциясы $x\to+\infty$ болгондо чексиз чоң болсо, б.а. ар кандай $M>0$ үчүн бардык $x>N$ болгондо $|f(x)|>M$ боло турган $N>0$ саны табылса, анда $y=\dfrac{1}{f(x)}$ функциясы $x\to+\infty$ болгондо чексиз кичине.

Мисал-1: $y=\dfrac{1}{x}$ функциясы чексиз кичине экендиги белгилүү.

$\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\cdots\dfrac{1}{x}$ (n жолу) болгондуктан, $y=\dfrac{1}{x^n}$ функциясы да $x\to\infty$ болгондо чексиз кичине. *Мисал-2:* $y=\dfrac{a_n}{x^n}+\ldots+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_1}{x}$ функциясы $x\to\infty$ болгондо чексиз кичине. *Мисал-3:* $y=\dfrac{x^2}{x^4+10}$ функциясы берилсе, аны $y=\dfrac{1}{x^2}\ \dfrac{1}{1+\dfrac{10}{x^4}}$ түрүндө жазууга болот. Мында $y=\dfrac{1}{x^2}$ функциясы $x\to\infty$ болгондо чексиз кичине, ал эми $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{10}{x^4}}$ функциясы чектелген (себеби, $1+\dfrac{10}{x^4}>1$, мындан $\dfrac{1}{1+\dfrac{10}{x^4}}<1$) болгондуктан, берилген функция $x\to\infty$ болгондо чексиз кичине болот. Төмөнкү айтылыштын да туура экендигине ишенүүгө болот:

Эгер $n>m$ жана $a_m\neq 0$, $b_m\neq 0$ $\quad y=\dfrac{a_m x^m+\ldots+a_0}{\text{в}_n x^m+\ldots+\text{в}_0}$ функиясы $x\to\infty$ болгондо чексиз кичине. Мисалы, $\quad y=\dfrac{x^3+6x-8}{x^4+2x^2+7}$ функцмясы $x\to\infty$ болгондо чексиз кичине болот.

y=$\frac{2x^2+3}{x^2+1}$ (m=n) функциясы x→∞ болгондо чексиз кичине эмес (мисалы, эгер x=1000 болсо, анда y=$\frac{2000003}{1000001}$>2 болот). Бирок, бул функция 2 саны менен y=$\frac{1}{x^2+1}$ чексиз кичине функциясынын суммасы түрүндө жазылат. Б.а., y=$\frac{2x^2+3}{x^2+1}$=2+$\frac{1}{x^2+1}$.

Ошондуктан, x тин чоң маанилеринде функциянын графиги y=2 сызыгы менен өтө жакындашат. Бул учурда x→∞ болгондо функция 2 ге умтулат деп айтышат жана $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+1}$=2 түрүндө жазылат. Жалпы учурда, эгер f(x)=b+α(x) болуп, α(x) чексиз кичине болсо, анда $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x)=b болот.

Бул учурда y=f(x) функциясынын графиги x→+∞ болгондо, y=b түз сызыгы менен дал келүүгө аракеттенет, б.а., x солдон оңго карай жылган сайын графиктердеги чекиттердин арасындагы аралык улам азайып, нөлгө жакындашат. Ушул сыяктуу эле $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x)=b жазуусу да аныкталат.

Жогоруда айтылган түз сызык берилген функциянын графиги үчүн <u>ассимптота</u> болот деп кабыл алынган. Акыркы мисалда y=2 түз сызыгы y=$\frac{2x^2+3}{x^2+1}$ функциясынын графигине ассимптота болот. y=b түз сызыгы y=f(x) функциясынын графиги үчүн $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x)=b болгондо гана ассимтота (горизонталдык) болот. Демек, тигил же бул функциянын горизонталдык ассимптотасын табуу үчүн анын x→+∞ жана x→−∞ болгондогу пределдерин табуу керек.

Эгер x→+∞ жана x→−∞ болгондогу y=f(x) функциясынын пределдери дал келсе, анда алардын жалпы мааниси берилген функциянын x→∞ болгондогу предели деп аталат жана $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) деп белгиленет.

Функциянын пределин эсептөөдө төмөнкү теоремалар колдонулат:

1. Эгер $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ жана $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)]=a+b$ (сумманын предели пределдердин суммасына барабар) жана $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$ (көбөйтүндүнүн предели пределдердин көбөйтүндүсүнө барабар).
2. Эгер $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$ жана $b\neq0$ болсо, анда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$$

Мисалы:

а) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+1}{2x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x^3}}=\frac{4+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{4}{2}=2$$

б) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_0}=\frac{a_n}{b_n};$$

Е. Функциянын үзгүлтүксүздүгү.

Аныктоо: Эгер $y=f(x)$ функциясы $x=a$ чекитинде аныкталган жана $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ болсо, анда а чекитинде үзгүлтүксүз функция деп аталат, б.а. функция берилген чекитте үзгүлтүксүз болуш үчүн

а) ошол чекитте функциянын предели жашоосу;

б) берилген функцияга $x=a$ ны коюп, функциянын маанисин табууга мүмкүн болушу зарыл.

Жогорку шарттар аткарылбаган чекиттер үзүлүү чекиттери деп аталышат. Мындай үзүлүүгө функция көбүнчө анын бөлүмү нөлгө айланган чекиттерде дуушар болот. Мисалы, $y=\frac{4}{x^2-9}$ функциясы үчүн үзүлүү чекиттери болуп $x=3$ жана $x=-3$ чекиттери эсептелет.

Бул корутунду төмөнкү теоремалардан келип чыгат:

1. Эгер $y=f(x)$ жана $y=g(x)$ функциялары а чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда ошол эле чекитте $y=f(x)+g(x)$ жана $y=f(x)g(x)$ функциялары да үзгүлтүксүз болушат.

2. Эгер y=f(x) жана y=g(x) функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болуп, g(a)≠0 болсо, анда $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ функциясы да ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.

Демек, эгер функция $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ туюнтмасы түрүндө берилип, y=f(x) жана y=g(x) функциялары үзгүлтүксүз болушса, анда үзүлүү бөлчөктүн бөлүмү нөл болгон учурда болушу мүмкүн.

Мисал-1: Жогорку теоремалардан $f(x)=b_nx_n+\ldots+b_0$ түрүндө көп мүчөлөрдүн x→a болгондогу предели, ал көп мүчөнүн a чекитиндеги маанисине барабар экендиги, б.а., $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ болушу келип чыгат. Ал деген сөз $f(x)=b_nx_n+\ldots+b_0$, түрүндөгү функция x аргументинин ар кандай маанисинде үзгүлтүксүз дегендик болот.

Мисал-2: $y=\frac{b_nx^n+\ldots+b_0}{c_mx^m+\ldots+c_0}$, x∈R функциясы эки үзгүлтүксүз функциялардын катышы экендиги көрүнүп турат. Экинчи теорема боюнча, бул берилген функция бөлүмү нөл болбогон чекиттердин бардыгында үзгүлтүксүз болот. ошол себептүү $y=\frac{x^2+9}{x^2-6x+8}$ функциясынын үзүлүү чекиттерин табуу үчүн $x^2-6x+8=0$ теңдемесин чыгаруу керек, б.а., $x_1=2$, $x_2=4$. Демек, бул функция үчүн 2 жана 4 чекиттери үзүлүү чекиттери болот.

Мисал-3:]−∞;0[, [0,2],]2,+∞[аралыктарында ар түрдүү туюнтмалар менен берилген төмөнкү функцияны карап көрөлү:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x-1, & 2\le x\le 0 \\ (x-1)^2, & x>2 \end{cases}$$

Бул функциянын x→0 болгондогу пределин тапсак, алар эки түрдүү:

Эгер x нөлдөн кичине болуп нөлгө умтулса, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$.

Эгер x нөлдөн чоң болуп нөлгө умтулса $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$.

Ошондуктан берилген функция x=0 чекитинде үзүлүүгө учурайт жана ал чекитте −1−1=−2 ге барабар болгон «секирүү» жасайт. Ал эми x=2 чекитинде үзүлүүгө ээ эмес, б.а., функция үзгүлтүксүз. Себеби, x→2 болгон эки учурда тең бир эле пределге ээ, б.а.,

$$\lim_{x\to 2}(x-1)=1 \text{ жана } \lim_{x\to 2}(x-1)^2=1$$

Окурманга: Акыркы функциянын графигин сызып айтылган корутундуларды график түрүндө карап көрүңүз.

Ж. Кесиндиде үзгүлтүксүз болгон функциялардын касиеттери

Аныктоо: Эгер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесиндисинин бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, анда ал функция ошол кесиндиде үзгүлтүксүз деп аталат.

Мындай функциялар бир топ маанилүү касиеттерге ээ:

1. Эгер $y=f(x)$ функцяисы $[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда анын ошол кесиндидеги маанилеринин арасында эң чоңу жана эң кичинеси бар болот.
2. Эгер $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп, анын учтарындагы маанилери ар түрдүү белгиге ээ болсо, анда ал кесиндинин кандайдыр бир чекитинде функция нөлгө айланат.

Мисалы, $y=x^3-6x+3$ функциясы $[2;3]$ кесиндисинин учтарында түрдүү белгиге ээ, б.а.,

$$f(2)=2^2-6\cdot 2+3=-1<0$$
$$f(3)=3^2-6\cdot 3+3=12>0$$

Демек, берилген функция $[2;3]$ кесиндисиндеги кандайдыр бир чекитте нөлгө айланат. Б.а., $x^3-6x+3=0$ теңдемеси $[2;3]$ кесиндисинде жок дегенде бир тамырга ээ болот.

10. Туунду, дифференциал, интеграл.

А. Функциянын өсүндүсү

Эгер кубдун кыры x болсо, анда анын көлөмү V анын кырына карата функция болот, б.а., $V=x^3$.

Металлдан жасалган кубду ысытканда анын кыры бир аз узарары белгилүү. Анда кубдун көлөмү да белгилүү өлчөмдө чоңоет. Эгер кубдун кыры x ысытуудан h ка узарса, анда анын кыры $x+h$ болуп калат, ал эми көлөмү $(x+h)^3$ болот. Демек, ысытуунун натыйжасында кубдун көлөмү $(x+h)^3-x^3$ га чоңойгон болот. Бул айырманы кубдун көлөмүнүн <u>өсүндүсү</u> деп коюшат, ал эми h болсо кубдун кырынын канчага чоңойгондугун билдирген өсүндү болот.

Бул айырма айрым учурда терс болушу да мүмкүн (мисалы, кубду муздатуудан анын өлчөмү азаят). Ошондуктан ал айырманын так аталышын кубдун көлөмүнүн өзгөрмөсү десек болмок. Бирок, математикада өсүндү деп аталып калган.

Математика илиминде кандайдыр бир x чоңдугунун өсүндүсүн Δx деп белгилешет. (Δ–гректин чоң дельта тамгасы латындын differentia– «айырма» деген сөзүн эске салат). Демек, x чоңдугунунун пайда болгон жаңы мааниси $x+\Delta x$ болот, б.а., баштапкы мааниси менен өсүндүнүн суммасына барабар. Эгер $y=f(x)$ функциясынын аргументи x кандайдыр бир Δx өсүндүсүн кабыл алса, анда функциянын мааниси да өзгөрүп, кандайдыр бир Δy деген өсүндү алат. Функциянын өсүндүсүн табуу үчүн:

1) аргументтин баштапкы маанисиндеги функциянын маанисин табуу, б.а., $y=f(x)$;
2) аргументтин жаңы маанисин табуу, б.а., $x+\Delta x$;
3) функциянын жаңы маанисин табуу, б.а., $f(x+\Delta x)$;
4) функциянын жаңы маанисинен баштапкы маанисин кемитүү, б.а. $f(x+\Delta x)-f(x)$ айырмасын табуу керек.

$$\text{Демек, } \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

Мисалы, $x=4$ болгон аргумент 0,1 өсүндүсүн алгандагы $y=x^2$ функциясынын өсүндүсүн табалы.

Жогорку алгоритм боюнча:

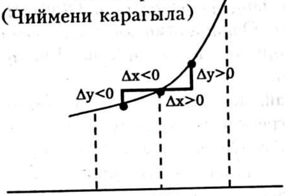
1) $x=4$ болгондогу функциянын баштапкы мааниси: $-f(4)=4^2=16$;
2) аргументтин жаңы мааниси: $4+0,1=4,1$;
3) функциянын жаңы мааниси: $f(4,1)=4,1^2=16,81$;
4) функциянын өсүндүсү: $\Delta y=f(4,1)-f(4)=16,81-16=0,81$

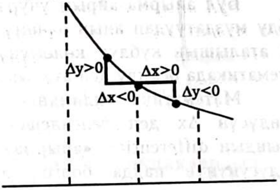
Жалпы түрдө $y=x^2$ функциясынын өсүндүсү

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$$

Эгер $[a;b]$ кесиндисинде $y=f(x)$ функциясы өсүүчү болсо, анда ушул аралыкта Δy жана Δx тердин белгилери бирдей болот– x чоңойсо y да чоңоет жана тескерисинче, x кичирейсе y да кичирейет. Эгер бул аралыкта функция кемүүчү болсо, анда кесиндинин каалаган чекиттеринде Δy жана Δx ар түрдүү белгилерге ээ болушат.

(Чиймени карагыла)





Б. Функциянын дифференциалы

Жогорку сыяктуу эле $y=x^3$ функциясынын өсүндүсүн тапсак, ал $\Delta y=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$

Өзгөртүп түзүүдөн кийин аны

$$\Delta y=3x^2\Delta x+(3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x$$

түрүндө жазууга болот. Бул өсүндү $3x^2\Delta x$ жана $(3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x$ кошулуучуларынан турат. Алардын биринчиси Δx өсүндүсүнө пропорциялаш, ал эми экинчисинин көз карандылыгы бир аз татаалыраак. Бирок, ал Δx тин кичине маанилеринде $3x^2\Delta x$ ке караганда бир топ кичине, себеби Δx менен $\Delta x\to 0$ болгондо нөлгө умтулган $3x\Delta x+\Delta x^2$ туюнтмасынын көбөйтүндүсүнөн турат. Мындай корутундуну $x=1$ болгондогу төмөнкү таблица аркылуу текшерүүгө болот:

Δx	Δy	$3x^2\Delta x$	$(3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x$
0,1	0,331	0,3	0,31
0,01	0,030301	0,03	0,000301
0,001	0,003003001	0,003	0,000003001

Демек, Δx ке пропорциялаш болгон $3x^2\Delta x$ кошулуучусу Δx тин кичине маанилеринде функциянын өсүндүсүнүн «башкы бөлүгү» болот. Бул кошуулучу функциянын <u>дифференциалы</u> деп аталып, dy деп белгиленет. Жогорку функциянын дифференциалы $dy=3x^2\Delta x$ болот. Ал Δx тен гана эмес x тен да көз каранды. Мисалы, $y=x^2$ функциясы үчүн $x=1$ жана $\Delta x=0{,}1$ болгондо $dy=0{,}3$, ал эми $x=2$ жана $\Delta x=0{,}1$ болгондо $dy=1{,}2$. Эгер $x=1$ жана $\Delta x=0{,}01$ болсо, анда $dy=0{,}03$.

Эгерде $y=f(x)$ функциясынын өсүндүсү $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ти биринчи кошулучуусу Δx ке пропорциялаш болгон, ал эми экинчиси Δx ке салыштырмалуу өтө кичине болгон эки кошулуучунун суммасы түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болсо, анда берилген функция, x тин, берилген мааниси үчүн, дифференцирленүүчү деп аталат. Башкача айтканда, эгер $\Delta y = \text{A}\,\Delta x + \alpha\Delta x$ жана $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$ болсо, анда x тин берилген мааниси үчүн y=f(x) функциясы дифференцирленүүчү болот.

Мисалы, $y=x^3$ функциясы үчүн $A=3x^2$ жана $\alpha = 3x\Delta x + \Delta x^2$.

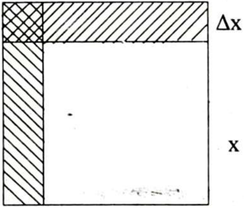
$\text{A}\,\Delta x$ кошулуучусу функциянын дифференциалы деп аталып, dy деп белгиленет. Аргументтин өсүндүсү аргументтин дифференциялы деп аталып, dx болуп белгиленет. Демек, $dx = \Delta x$ жана $dy = Adx$. Мында X тен көз каранды болгондуктан $dy = A(x)dx$ деп жазуу тагыраак болот.

Мисал: $y=x^2$ функциясынын дифференциялын табалы. Бул функциянын өсүндүсү

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Мындан $dy = 2x\,\Delta x = 2xdx$ болот.

$y=x^2$ функциясынын дифференциалы жөнөкөй эле геометриялык мазмунга ээ. $S=x^2$ жагынын узундугу X болгон квадраттын аянты болгондуктан, ΔS чиймедеги штрихтелген фигуранын аянты болот. Δx тин кичине маанисинде бул аянттын башкы бөлүгү $2x\,\Delta x$ ке барабар болгон эки тик бурчтуктун аянтына барабар, б.а., $S=x^2$ функциясынын дифференциялына барабар. Ал эми Δx^2 туютмасы болсо Δx менен салыштырмалуу чексиз кичине болгон квадратчанын аянтына барабар.



В. Туунду.

$\Delta y = A(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ формуласынын эки жагын тең Δx ке бөлсөк,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) + \alpha$ келип чыгат .

Дифференциалдын аныктоосу боюнча $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A(x)$ болот.

Демек, A(x) коэффициенти функциянын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катыштын, $\Delta x \to 0$ болгондогу предели экен. Бул коэффициент $y=f(x)$ функциясынын X тин берилген маанисиндеги <u>туундусу</u> деп аталат жана $f'(x)$ деп белгиленет.

Демек, $y=f(x)$ функциясы берилсе, анда анын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катыштын $\Delta x \to 0$ болгондогу предели ал функциянын туундусу деп аталат. б.а.

$$A(x)=f'(x)= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

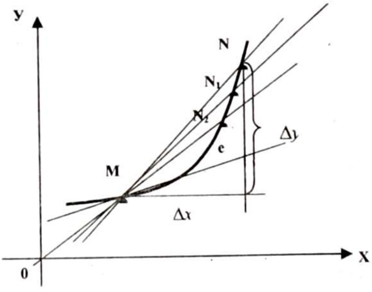
Жогоруда $dy=A(x)dx$ экендиги белгилүү. Анда

$$dy=f'(x)dx \text{ болот.}$$

Мисалы, $y=x^3$ функциясы үчүн $dy=3x^2dx$ эле. Демек, берилген функциянын туундусу-$3x^2$ б.а., $(x^3)'=3x^2$. Ал эми $y=x^2$ фукциясынын туундусу-$2x$.

Туунду түшүнүгү математикада бир топ практикалык колдонууларга ээ.

ХОУ тегиздигинде кандайдыр бир ийри сызыктан M чекитин алып, ошол чекит аркылуу ал ийри сызыкка жүргүзүлүүчү жаныма сызыкты аныктайлы.



Берилген M чекити аркылуу MN кесүүчү сызыгын жүргүзөбүз да, N чекитин ийри сызык аркылуу M ге жакындатабыз. Анда MN сызыгы M чекитинин айланасында бурулуп, кандайдыр бир l сызыгына жакындайт, б.а., MN жана l сызыктарынын арасындагы бурч нөлгө умтулат. Бул учурда l сызыгын берилген ийри сызыкка анын M чекитинде жүргүзүлгөн <u>жаныма сызыгы</u> деп аташат. Демек, MN кесүүчү сызыгынын, M жана N чекиттеринин арасындагы аралык нөлгө умтулгандагы пределдик (эң акыркы) абалы, берилген ийри сызыктын M чекитинде жүргүзүлгөн жаныма сызыгы болот.

$y=f(x)$ функциясынын графигине $M(x_0;y_0)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма сызыктын теңдемесин келтирип чыгарабыз. Мында $y_0=f(x_0)$ болгондуктан, $M(x_0;y_0)$ чекити аркылуу өткөн, бурчтук коэфициенти K болгон түз сызыктын теңдемеси

$$y-f(x_0)=k(x-x_0)$$

Жаныма сызыктын бурчтук коэфициентин табуу үчүн эң оболу MN кесүүчүсүнүн бурчтук коэфициентин табабыз.

Жогорку чиймеден ал коэфициент $k_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ экендиги көрүнүп турат. Жаныма сызык кесүүчү сызыктын N чекити M чекитине умтулгандагы ($\Delta x\to 0$) пределдик абалы болгондуктан, $\Delta x\to 0$ болгондо кесүүчү жанымага, ал эми кесүүчүнүн бурчтук коэфициенти жаныманын бурчтук коэфициентине умтулат. б.а.,

$$k=\lim_{\Delta x\to 0} k_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

Эгер $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда акыркы предел $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу болот. б.а.,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \text{ же } k=f'(x_0).$$

Анда жаныма сызыктын изделүүчү теңдемеси

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \text{ болот.}$$

Демек, $k=f'(x_0)$ барабардыгынан туундунун геометриялык мааниси келип чыгат: $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу, $y=f(x)$ функциясынын графигине, абциссасы x_0 болгон чекитте жүргүзүлгөн жаныма сызыктын бурчтук коэфициентине барабар.

__Мисалы:__ $y=x^3$ функциясынын графигине $x_0=2$ чекитинде жаныма сызык жүргүзүлсүн. Анда $y_0=x_0^3=2^3=8$ жана $f'(2)=3\cdot 2^2=12$.

Демек, жаныманын теңдемеси

$$y-8=12(x-2)$$
$$y-8=12x-24$$
$$y=12x-16 \qquad \text{болот.}$$

Г. Туундунун механикалык мааниси

Туунду түшүнүгү физика илиминде да көп кездешип, колдонууга ээ болот. Айталы M чекити координата огу боюнча кыймылда болсун. Анда анын координатасы x убакыттын t моментинде t дан функция болот. б.а. $x=f(t)$. Бул функция чекиттин кыймылынын законун берет. Убакыттын t_1 моментинде чекиттин координатасы x_1, ал эми убакыттын t_2 моментинде– x_2 болсун. Анда убакыттын $[t_1,t_2]$ аралыгында чекиттин басып өткөн жолу x_2-x_1 болуп, орточо ылдамдыгы $\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$ болот, б.а.

$\upsilon_{орт}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$. Эгер t_1 дин ордуна t, x_1 дин ордуна x деп жазып, t_2-t_1 жана x_2-x_1 айырмаларын Δt жана Δx деп белгилесек, анда кыймылдын орточо алдамдыгы $\upsilon_{орт}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ түрүндө жазылат. Бирок, убакыттын Δt мезгилинде чекиттин ылдамдыгы өзгөрүп турат. Анын убакыттын кандайдыр бир t моментиндеги кыска аралыктарын алып, ошол убакыттардагы ылдамдыктын пределин алуу керек. Башкача айтканда, убакыттын t моментиндеги чекиттин көз ирмемдеги (чыныгы) ылдамдыгы деп $[t;\ t+\Delta t]$ убакыт аралыгындагы чекиттин орточо ылдамдыгынын, $\Delta t\to 0$ болгондогу предели аталат. б.а.

$$\upsilon_г=\lim_{\Delta t\to 0}\upsilon_{орт}$$

$\upsilon_{орт}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ болгондуктан $\upsilon_г=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Туундунун аныктоосу боюнча бул предел $x=f(t)$ функциясынын туундусуна барабар:

$$\upsilon_г=f'(t).$$

Мисалы, нерсенин эркин түшүүсүн карап көрөлү. Эркин түшүү $S=\frac{gt^2}{2}$ формуласы менен берилери белгилүү. Бул функциянын туундусу $S'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=gt$

Демек, эркин түшүүчү нерсенин убакыттын t моментиндеги чыныгы ылдамдыгы $\upsilon=gt$ формуласы менен аныкталат.

Д. Дифференцирлөөнүн негизги формулалары

Мурдагы пунктта $(x^3)'=3x^2$ жана $(x^2)'=2x$ болорун билдик. Эми каалаган көп мүчө үчүн дифференцирлөө формулаларын келтирип чыгарабыз.

1. Турактуу сандын туундусу нөлгө барабар: $c'=0$. Чындыгында, Δx тин каалаган маанисинде $y=c$ функциясынын өсүндүсү нөлгө барабар ($\Delta y=0$). Демек, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. Ошол себептүү $c'=0$.
2. Аргументтин туундусу бирге барабар, б.а., $x'=1$. Чындыгында $y=x$ функциясы үчүн $\Delta y=\Delta x$. Демек, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$ же $x'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$.
3. Эки функциянын суммасынын туундусу алардын туундуларынын суммасына барабар. б.а., $(U+V)'=U'+V'$.

Далилдөө: $y=U+V$, $U=U(x)$ жана $V=V(x)$ болсун. Эгер x ке Δx өсүндүсүн берсек, анда U, V лар ΔU жана ΔV, ал эми y болсо Δy өсүндүлөрдүн алышат, б.а.,

$$y+\Delta y=(U+\Delta U)+(V+\Delta V)$$

Мындан $\Delta y=(U+\Delta U)+(V+\Delta V)-(U+V)=\Delta U+\Delta V$

Барабардыктын эки жагын тең Δx ке мүчөлөп бөлсөк

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}+\frac{\Delta V}{\Delta x}$$ келип чыгат.

Сумманын предели пределдердин суммасына барабар болгондуктан, мүчөлөп пределге өтөбүз

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Мындан туундунун аныктоосу боюнча

$y'=U'+V'$ же

$(U+V)'=U'+V'$ болот.

Эскертүү: Бул теореманы экиден ашык кошулуучулар болгондо да колдонууга болот.

4. Эки функциянын көбөйтүндүсүнүн туундусу төмөнкү формула боюнча аныкталат:

$$(UV)'=UV'+U'V$$

Далилдөө: Эгер $y=UV$, $U=U(x)$ жана $V=V(x)$ болсо, анда

$$y+\Delta y=(U+\Delta U)x(V+\Delta V)=UV+U\Delta V+V\Delta U+\Delta U\Delta V$$

же $\Delta y=U\Delta V+V\Delta U+\Delta U\Delta V$

Мындан $\frac{\Delta y}{\Delta x}=U\frac{\Delta V}{\Delta x}+V\frac{\Delta U}{\Delta x}+\frac{\Delta U}{\Delta x}\frac{\Delta V}{\Delta x}\Delta x$

Акыркы барабардыктан мүчөлөп пределге өтүп жана төмөнкүлөрдү эске алып,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(U\frac{\Delta V}{\Delta x}\right)=U\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=UV'\ \lim_{\Delta x\to 0}\left(V\frac{\Delta V}{\Delta x}\right)=V\cdot U' \text{ жана}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x}\Delta x\right)=U'\cdot V'\cdot 0=0 \text{ экендигин эске алып}$$

$(U\cdot V)'=UV'+U'V$ экендиги келип чыгат.

Бул формуладан $(CU)'=CU'$, (C-const) болорун оңой эле келтирип чыгарууга болот, б.а. туруктуу санды туунду белгисинин сыртына чыгарып жиберүүгө болот.

Мисалы, $(7x^3+5x^2+3)'=7\cdot(x^3)'+5\cdot(x^2)'+3'=7\cdot 3x^2+5\cdot 2x+0=21x^2+10x$

5. Жогоркулар сыяктуу эле

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{UV'+U'V}{V^2} \text{ экендигин далилдөөгө болот.}$$

6. Ар кандай натуралдык n үчүн
   $(x^n)'=n(x^{n-1})$

Бул формуланы толук математикалык индукция методу менен далилдейбиз.

а) n=1 болгондо бул формула туура, б.а.,
   $(x)'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=x^0=1$

б) n=k үчүн туура болсун, б.а.,
   $(x^k)'=k\cdot x^{k-1}$

n=k+1 үчүн туура болорун далилдейбиз:

$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot(x)'=kx^{k-1}\cdot x+x^k\cdot 1=kx^k+x^k=(k+1)x^k$

Демек, $(x^{k+1})'=(k+1)\cdot x^{k+1-1}=(k+1)\cdot x^k$.

Берилген формула ар кандай натуралдык n үчүн туура болот.

Акыркы формулан натуралдык сандар үчүн гана эмес ар кандай анык сандар үчүн да туура болот.

Мисалы:

1) $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;

2) $\left(\frac{3}{x^4}\right)'=\left(3x^{-4}\right)'=3\cdot(-4x^{-4-1})=-12x^{-5}=-\frac{12}{x^5}$;

Жогорку формулалардын жардамы менен ар кандай алгебралык бөлчөктөрдүн туундуларын табууга болот.

Мисалы: $y=\frac{2x^5-6x^3+4}{3x^4}$

$$y'=\frac{(2x^5-6x^3+4)'\cdot 3x^4-(2x^5-6x^3+4)\cdot(3x^4)'}{(3x^4)^2}=$$

$$=\frac{(10x^4-18x^2)\cdot 3x^4-(2x^5-6x^3+4)\cdot 12x^3}{9x^8}=$$

$$=\frac{30x^8-54x^6-24x^8+72x^6-48x^3}{9x^8}=\frac{6x^8+18x^6-48x^3}{9x^8}=$$

$$=\frac{2x^8+6x^6-18x^3}{3x^8}=\frac{2x^5+6x-18}{3x^5}=\frac{2(x^5+3x-9)}{3x^5};$$

E. Анык эмес интеграл

Жогорку пункттарда берилген функциянын туундусун табууну карадык. Практикада ага тескери маселелер да кездешет, б.а. функциянын туундусу берилген болсо, анда дифференцирлеген алгачкы функциянын өзүн табууга туура келет.

Аныктоо: Эгер F'(x)=f(x) болгондо гана y=F(x) функциясы y=f(x) функциясы үчүн алгачкы функция деп аталат.

Мисалы, $y=x^3$ функциясы $y=3x^2$ функциясы үчүн алгачкы функция болот, себеби $(x^3)'=3x^2$. Ошондой эле $y=3x^2$ функциясы үчүн $y=x^3+C$ (C– турактуу сан) түрүндөгү функциялар да алгачкы функция болору көрүнүп турат, себеби $(x^3+C)'=3x^2$;

Демек, ар бир функция бир гана туундуга ээ болгону менен, анын алгачкы өтө көп функциялары болот. Алар бири-биринен турактуу кошулуучулары менен гана айырмаланышат, б.а., эгер y=F(x) функциясы y=f(x) функциясынын кандайдыр бир алгачкы функциясы болсо, анда бул функциянын бардык алгачкы фукнцияларынын жалпы көрүнүшү y=F(x)+C түрүндө болот.

Аныктоо: y=f(x) функциясынын бардык алгачкы функцияларынын жыйындысы ал функциянын анык эмес интегралы деп аталат жана ∫f(x)dx деп белгиленет.

Демек, ∫f(x)dx=F(x)+C.

Мисалы:

1) $\int 3x^2dx=x^3+C$, себеби $(x^3+C)'=3x^2$

2) $\int (n+1)x^ndx=x^{n+1}+C$, себеби $(x^{n+1}+C)'=(n+1)x^n$

Функцияларды дифференцирлөө формулаларынан анык эмес интегралдын төмөнкү касиеттери келип чыгат:

1. ∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx, б.а., сумманын анык эмес интегралы ал эки функциянын интегралдарынын суммасына барабар.

2. Турактуу көбөйтүүчүнү интеграл белгисинин сыртына чыгарып жиберүүгө болот, б.а.,

$\int\lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$, λ– турактуу сан.

Бул касиетти пайдаланып, жогорку формуланы төмөнкүчө өзгөртүп жазууга болот:

$$(n+1)\int x^n dx=x^{n+1}+C \text{ же } \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

Ошондой эле $\int dx=x+C$ экендиги да анык.

Мисалы:

1) $\int(x^6\text{-}4x^2+5)dx=\int x^6dx-\int 4x^2dx + 5\int dx=\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{3}x^3+5x+C$;

2) $\int\frac{dx}{x^7}=\int x^{-7}dx=\frac{x^{-7+1}}{-7+1}+C=\frac{x^{-6}}{-6}+C=-\frac{1}{6x^6}+C$

Ж. Анык интеграл

$\int f(x)dx=F(x)+C$ формуласында x тин берилген мааниси үчүн интегралдын маанисин табууга болбойт, себеби C турактуу саны бар. Бирок, андай болгону менен ал интегралдардын берилген a жана b чекиттериндеги маанилеринин айырмасын табууга мүмкүн, б.а.,

$$[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a).$$

Бул барабардыктан: $y=f(x)$ функциясынын алгачкы функциясынын a жана b чекиттериндеги маанилеринин айырмасы, c санына карабастан дайыма бирдей болот.

Аныктоо: $y=f(x)$ функциясынын алгачкы функциясынын b жана a чекиттериндеги маанилеринин айырмасы бул функциядан [a;b] кесиндиси боюнча анык интегралы деп аталат жана

$$\int_a^b f(x)dx$$ деп белгиленет.

Демек, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Мында $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн алгачкы функция. $F(b)-F(a)$ айырмасын математикада $F(x)\Big|_a^b$ деп да белгилешет.

Мисалы, $\int_2^5 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^5=\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}=39$

Анык эмес интеграл сыяктуу эле анык интеграл үчүн төмөнкү касиеттер орун алат:

1. $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. $$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

3. Эгер a<c<b болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Чындыгында, бул формулага аныктоо боюнча айырмаларды койсок $F(b)-F(a)=[F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)]=F(b)-F(a)$ туура барабардык келип чыгат.

4. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Себеби, $F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]$

XII ГЛАВА

Геометриянын элементтери– тегиздиктеги жана мейкиндиктеги геометриялык фигуралар, көп грандыктар

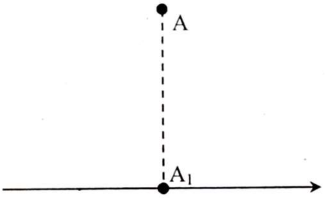
1. Тегиздиктеги координаталык геометрия

1) Чекиттин тегиздиктеги координаталары

Практикада тигил же бул чекиттин («нерсенин») тегиздиктеги абалын (кайсы жерде жайгашарын) билүү зарылчылыктары көп эле кездешет. Мисалы, бөлмөгө портрет илүү үчүн мык кагуу керек болсо, анда анын кайсы жерге кагылышын так аныктоо үчүн дубалдын эки кырынан канчалык аралыкта болорун тактоо керек. Же, шахмат доскасындагы каалаган фигуранын кайсы клеткада турарын билүү үчүн эки өлчөмдү билүү керек болот (а5, с7…).

Бул проблеманы (чекиттин тегиздиктеги «адресин» табуу) алгачкылардан болуп чечкен француз математиктери Р.Декарт (1596-1650) жана П.Ферма (1601-1665) болушкан.

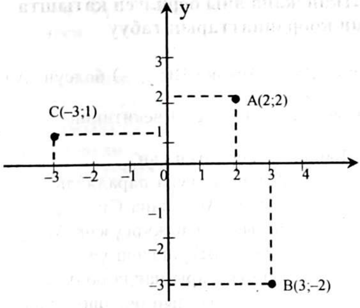
Аныктоо: Чекиттин берилген октогу проекциясы деп ошол чекиттен берилген окко түшүрүлгөн перпендикуляр менен октун кесилишкен чекити аталат.



Чекиттин абцисса жана ордината окторундагы проекциялары ал чекиттин абциссасы жана ординатасы же координаталары деп аталат. Жазылышы

$A(a;b)$

Координата октору өз ара перпендикуляр болгон учур гана каралып жаткандыктан бул система тик бурчтуу декарттык координата системасы деп аталат.

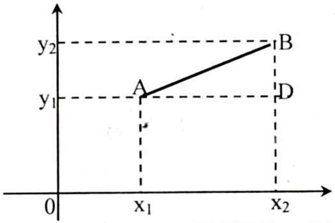


O(0;0) чекити− координата башталышы.

Жогоркулардын негизинде xoy тегиздигиндеги чекиттердин көптүгү менен (a;b) түрүндөгү анык сандарынын түгөйлөрүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк бар деп айтууга болот.

2) Учтарынын координаттары боюнча кесиндинин узундугу

xoy тегиздигинде $A(x_1;y_1)$ жана $B(x_2;y_2)$ чекиттери берилсин.



AD сызыгын жүргүзүп ABD тик бурчтуу үч бурчтугун алабыз. Андан Пифагордун теоремасын пайдаланып $|AB|^2=|AD|^2+|BD|^2$ экендигин алабыз. Мында

$$|AD|=|x_2-x_1|=\Delta x$$
$$|BD|=|y_2-y_1|=\Delta y$$

болгондуктан, ордуна койсок

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ келип чыгат. Бул AB кесиндисинин узундугун табуу үчүн колдонулат.

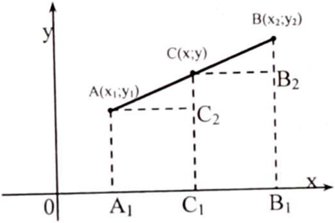
Бул формуланын айрым учуру болуп $|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ формуласы эсептелет, себеби O(0;0).

Мисалы, A(3;−2) жана B(0;7) болсо, анда

$|AB|=\sqrt{(0-3)^2+(-7+2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.

3. Берилген кесиндиде жаткан жана аны берилген катышта бөлүүчү чекиттин координаттарын табуу

AB кесиндисинин учтары $A(x_1;y_1)$ жана $B(x_2;y_2)$ болсун. Ал кесиндини $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$ катышында бөлө турган $C(x;y)$ чекитинин координаттарын табуу керек. Мында λ– берилген сан.



Абцисса огуна параллель болгон AC_2 жана CB_2 сызыктарын жүргүзсөк AAC_2 жана CBB_2 окшош үч бурчтуктары пайда болушат. Анда, алардын окшоштугунан $\dfrac{AC_2}{CB_2}=\dfrac{AC}{CB}$ же $\dfrac{OC_1-OA_1}{OB_1-OC_1}=\lambda$

же $\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$ келип чыгат.

Акыркы формуладан x ти табабыз:

$$x=\frac{x_1+x_2\lambda}{1+\lambda} \quad (1)$$

Ошондой эле $\dfrac{CC_2}{BB_2}=\dfrac{AC}{CB}$ же $\dfrac{CC_1-AA_1}{BB_1-CC_1}=\lambda$ же $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\lambda$

болгондуктан $y=\dfrac{y_1+y_2\lambda}{1+\lambda}$ (2) болот.

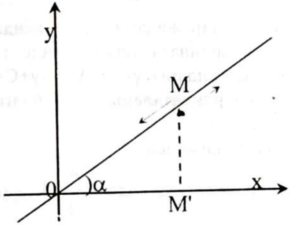
Демек, изделүүчү C чекитинин координаталары (1) жана (2) формулалары аркылуу табылат.

Эгер $C(x;y)$ чекити AB кесиндисинин тең ортосу болсо, анда $\lambda=1$ болгондуктан

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ болот.

4) Түз сызык (биринчи тартиптеги сызык) жана анын теңдемеси

Эгерде декарттык координата системасындагы I жана III чейректердин биссектрисасындагы чексиз сандагы чекиттерди алсак, анда алардын координаталары өзгөрмөлөр болушат. б.а. эгер M чекити биссектрисада жатса, анда ал x–абцисса жана y ордината өзгөрмөлөрүнө ээ. Мында, ал түз сызыктын каалаган чекити үчүн $y=x$, себеби $\Delta OMM'$– тең капталдуу.

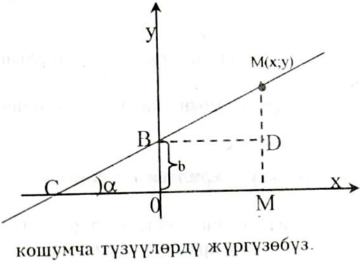


Түз сызыктагы чекиттердин саны чексиз болгондуктан $y=x$ теңдемесин канааттандыруучу түгөйлөрдүн саны да чексиз: ар бир түгөйгө бирден гана M_1, M_2,... чекиттери туура келет

Бул каралган учур O чекити аркылуу өтүүчү сызыктардын айрым бир өзгөчө учуру гана болот. Эми, координата башталышы аркылуу өтүүчү ар кандай түз сызыкта жаткан чексиз чекиттердин көптүгүн карап көрөлү.

Мындай учурларда $y \neq x$ болуп, ал сызыктарда жаткан ар кандай чекит үчүн $\frac{y}{x}=k$ (k–турактуу сан) экендиги анык. Мындан $y=kx$, $k=tg\alpha$.

Жогорку учурда $\alpha=45^0$ болгондуктан $k=tg45^0=1$, демек $y=1 \cdot x=x$ болот.



Эми M чекитин xoy тегиздигинде жаткан каалаган түз сызыктан алалы. Айталы ал түз сызык oy огун b анык санында кесип өтүп, ox огунун оң багыты менен α бурчун түзсүн. y жана x өзгөрмөлөрүнүн арасындагы көз карандылыкты келтирип чыгаруу үчүн чиймеде бир топ кошумча түзүүлөрдү жүргүзөбүз.

Чиймеде BD=x, MD=y−b болгондуктан, $\frac{y-b}{x}$=tgα=k келип чыгат. Мындан y−b=kx же y=kx+b. Пайда болгон теңдеме берилген CM түз сызыгынын теңдемеси болот.

Бул теңдеме жогорку эки учурду өз ичине камтыйт, б.а.,

1) эгер b=0 болсо, анда түз сызык координата башталышы аркылуу өтөт да, $y=k\cdot x+0=kx$ болот;
2) эгер b=0 жана k=1 болсо, анда $y=1\cdot x+0=x$.

Теорема: Эки белгисиздүү биринчи даражадагы ар кандай Ax+By+C=0 түрүндөгү теңдеме координата тегиздигинде түз сызыкты берет, б.а., A, B жана C сандары үчүн Ax+By+C=0 теңдемеси аркылуу аныкталган, координаталары (x;y) болгон чекиттер бир түз сызыкта жатышат.

Чындыгында, B≠0 болсо берилген теңдемеден

By=−Ax−C же $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ келип чыгат. Эгерде $-\frac{A}{B}=k$ жана $-\frac{C}{B}=b$ болсун десек, анда y=kx+b болот.

Мисалы, 3x+4y−12=0 теңдемеси аркылуу аныкталган M(0;3), N(4;0), $Q(6;-\frac{3}{2})$, D(−4;6) жана $E(-6;\frac{15}{2})$ чекиттери бир эле түз сызыкта жатышат, себеби берилген теңдемени жөнөкөй өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин $y=-\frac{4}{3}x+3$ келип чыгат.

Окурманга:

1. Координата окторунун теңдемелерин жазыңыз.
2. ох жана оу окторуна параллель болгон түз сызыктардын теңдемесин табыңыз.
3. Түз чызыктын графигин сызуу үчүн анын канча чекитинин координаталарын табуу жетиштүү?

5) Түз сызыктын кесиндилер аркылуу берилген теңдемеси

Тегиздиктеги түз сызыктын абалы же эки чекит, же бир чекит жана түз чызыктын ох огу менен түзгөн бурчу аркылуу аныкталарын карадык.

Эгер түз сызык координата окторунун бирине да параллель болбосо жана координата башталышы аркылуу өтпөсө, анда анын абалын координата окторундагы анын кесип өткөн кесиндилер аркылуу да аныктоого болот.

Чындыгында, түз сызыктын жалпы теңдемесиндеги бардык коэффициенттер нөлдөн айырмаланган болгондо гана ал координата окторун кандайдыр бир кесиндилер аркылуу кесип өтөт.

Изделүүчү теңдемени келтирип чыгаруу үчүн Ax+By+C=0 теңдемесин төмөнкүчө бир топ өзгөртүп түзөбүз:

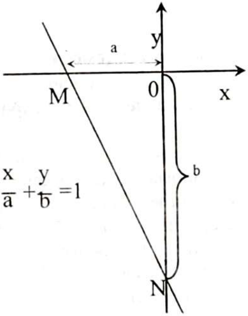
$$Ax+By+C=0 => \frac{Ax}{C}+\frac{By}{C}=-1$$

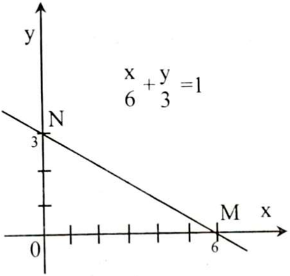
$$\text{же } \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \text{ же } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B}$$

Пайда болгон теңдеме түз сызыктын кесиндилер аркылуу берилген теңдемеси болот. Мындагы a жана b сандарынын геометриялык маанисин тактасак:

y=0 болгондо x=a
x=0 болгондо y=b

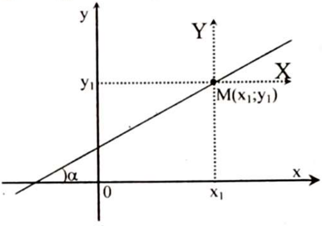
Демек, a жана b сандары ox жана oy окторундагы кесиндилердин узундуктары болушат.





6) Бурчтук коэффициенти k жана берилген чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси

Бурчтук коэффициенти k болгон жана $M(x_1;y_1)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин келтирип чыгаралы.



Координата башталышын M чекитине параллель которобуз, анда XMY системасындагы бурчтук коэффициенти k болгон түз сызыктын теңдемеси

$$Y=kX \text{ болот.}$$

Мында $Y=y-y_1$ жана $X=x-x_1$ болгондуктан изделүүчү теңдеме $y-y_1=k(x-x_1)$ болот. Бул бурчтук коэффициенти k болгон жана $M(x_1;y_1)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси.

<u>Мисалы</u>: ох огунун оң багыты менен 30^0 тук бурч түзгөн $M(-2;4)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

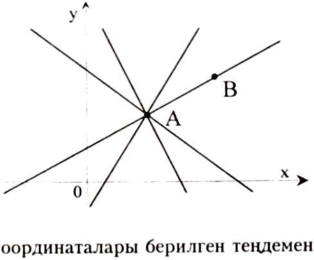
Бурчтук коэффициенти $k=tg30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ болгондуктан, жогорку теңдемеге тиешелүү маанилерди коебуз.

$y-4=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ же $3y-12=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ же $3y-\sqrt{3}x-12-2\sqrt{3}=0$

теңдемеси келип чыгат.

7) Эки чекит аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси

Тегиздикте $A(x_1;y_1)$ жана $B(x_2;y_2)$ чекиттери берилсин. Бул чекиттер аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин келтирип чыгарабыз.



Мурда $x_1 \neq x_2$ жана $y_1 \neq y_2$ болгон учурду карайбыз. $A(x_1;y_1)$ чекити аркылуу бир нече түз сызыктар өтөт. Алардын ичинен бурчтук коэффициенти k болгон түз сызыктын теңдемеси

$y-y_1=k(x-x_1)$ болот.

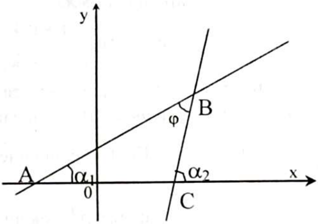
Бул сызык $B(x_2;y_2)$ чекити да аркылуу өтсө, анда анын координаталары берилген теңдемени туура барабардыкка айландырат, б.а. $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Мындан $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ келип чыгат. Жогорку теңдемеге k нын пайда болгон маанисин койсок $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ же $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ болот.

Бул изделүүчү теңдеме– түз сызыктын жалпы теңдемесинин айрым бир учуру.

Эгер $x_1=x_2$ же $y_1=y_2$ болсо, анда пайда болгон теңдеме өз маанисин жоготот. Бул учурларда А жана В чекиттери же оу огуна же ох огуна параллель болгон түз сызыктарда жаткан болот. Мында түз сызыктын теңдемеси $x=x_1$ же $y=y_1$ болуп калат.

8) Түз сызыктардын арасындагы бурч

$y=k_1x+b_1$ жана $y=k_2x+b_2$ теңдемелери менен (мында k_1, k_2, b_1, b_2 анык сандар) эки түз сызык берилсин. Алардын арасында пайда болгон бурчту табуу үчүн формуланы келтирип чыгарабыз.



Ал сызыктардын ох огу менен түзгөн бурчтары (оң багыты менен!) α_1 жана α_2 болуп, арасындагы φ бурчун табуу керек болсун. α_2 бурчу АВС үч бурчтугунун сырткы бурчу болгондуктан $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$ болот. Мындан $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$. Бул бурчтар барабар болгондуктан, алардын тенгенстери да барабар болушат, б.а., $tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)$ же $tg\varphi=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}$. Бирок $tg\alpha_1=k_1$, $tg\alpha_2=k_2$ болгон себептүү, берилген түз сызыктардын арасындагы бурч $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ формуласы менен аныкталат.

Мисалы: $2x-3y+6=0$ жана $x+5y-2=0$ түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.

а) Эгер $k_1=\frac{2}{3}$ жана $k_2=-\frac{1}{5}$ деп алсак, анда бул маанилерди жогорку формулага коюп

$$tg\varphi=-1, \text{ мындан } \varphi=arctg(-1)=135^0.$$

б) Эгер $k_1=-\frac{1}{5}$ жана $k_2=\frac{2}{3}$ деп алынса, анда

$$tg\varphi=1, \text{ мындан } \varphi=45^0.$$

9) Түз сызыктардын параллелдигинин жана перпендикулярдуулугунун белгилери

а) Эгер эки түз сызык параллель болсо, анда алардын арасындагы бурч 0^0 же 180^0 болору белгилүү. $tg0^0=0$ болгондуктан жогорку формуладан

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=0 \text{ же } k_2-k_1=0 \text{ же } k_1=k_2 \text{ болот.}$$

Же тескерисинче, $k_2=k_1$ болсо, анда $k_2-k_1=0$ же $tg\varphi=0$ болот. Мындан $\varphi=0^0$ же $\varphi=180^0$ келип чыгат. Демек бурчтук коэффициенттер өз ара барабар болгондо гана ал түз сызыктар өз ара параллель.

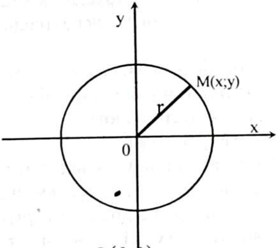
б) $tg\varphi \cdot ctg\varphi=1$ болгондуктан, жогорку формуланы $ctg\varphi=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}$ түрүндө жазууга болот. Эгер түз сызыктар өз ара перпендикуляр болсо, анда $\varphi=90^0$ же $ctg90^0=0$ болот. Анда акыркы формуладан $\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0$ же $1+k_1k_2=0$ же $k_2=-\frac{1}{k_1}$ келип чыгат. Же тескерисинче, эгер $k_2=-\frac{1}{k_1}$ болсо, анда $1+k_2k_1=0$ болот. Мындан формула боюнча $ctg\varphi=0^0$ же $\varphi=90^0$ болору, б.а. эки түз сызык өз ара перпендикуляр экендиги келип чыгат.

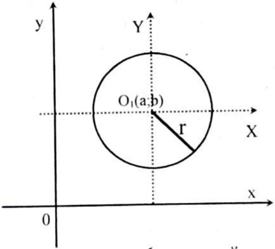
Демек, эгер эки түз сызык өз ара перпендикуляр болушса, анда алардын бурчтук коэффициенттери абсолюттук чоңдугу боюнча тескери жана белгилери боюнча карама-каршы (жана тескерисинче).

2. Экинчи тартиптеги ийри сызыктар

1) Айлана жана анын теңдемеси

Мектеп курсунан бир чекиттен бирдей аралыкта жаткан чекиттердин тегиздиктеги геометриялык орду айлана болору белгилүү. Бул аныктоодон пайдаланып, анын теңдемесин келтирип чыгарабыз.





Борбору O(0;0) чекитинде жаткан, радиусу r болгон айлананын теңдемесин чыгаруу үчүн, анын M(x;y) чекитин алабыз да |OM| аралыгын табабыз:

$$|OM|=r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ же } x^2+y^2=r^2$$

M(x;y) айлананын каалаган чекити болгондуктан пайда болгон теңдеме изделүүчү теңдеме болот.

Эгер айлананын борбору $O_1(a;b)$ чекитинде жатса, анда координата башталышын O_1 чекитине параллель которуп, XO_1Y координата системасында радиусу r болгон айлананын теңдемесин жазсак, $X^2+Y^2=r^2$ болот. Параллель которуудагы координаталардын катнаштыктарын эске алып, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ экендигин келтирип чыгарабыз. Бул борбору $O_1(a;b)$ чекитинде болгон жана радиусу r болгон айлананын теңдемеси.

Акыркы теңдеме кашааларды ачып, топтоштурсак

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

теңдемеси келип чыгат. Пайда болгон теңдеменин эки жагын тең A га көбөйтүп,

$$-2Aa=D,\ -2Ab=E,\ Aa^2-Ab^2-Ar^2=F$$

белгилөөлөрүн киийрсек

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$$

Пайда болгон теңдеме координаттык тегиздиктеги айлананын жалпы теңдемеси болот.

Бул теңдеме эки белгисиздүү экинчи даражадагы жалпы теңдеменин, б.а.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ дүн

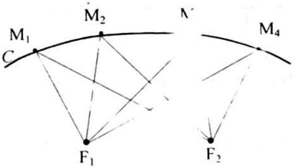
айрым бир учуру болуп эсептелет. (A=C жана B=0)

2) Эллипс жана анын теңдемеси

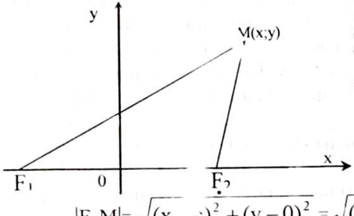
Аныктоо: Ар биринен фокус деп аталуучу берилген эки чекитке чейинки аралыктардын суммасы турактуу болгон (жана фокустардын ортосундагы аралыктан чоң) чекиттердин геометриялык орду эллипс деп аталат.

Эгер *е* сызыгы эллипстин бир бөлүгү болсо, анда андан алынган M_1, M_2, M_3, M_4 чекиттер, ал эми F_1 жана F_2 эллипстин фокустары болсо, анда аныктоо боюнча төмөнкү барабардыкты жазууга болот:

$F_1M_1+M_1F_2=F_1M_2+M_2F_2=F_1M_3+M_3F_2=F_1M_4+M_4F_2=const.$



Бул аныктоону пайдаланып эллипстин теңдемесин келтирип чыгарабыз. Ал үчүн абцисса огу F_1 жана F_2 фокустары аркылуу өткөн, ал эми ордината огу үчүн F_1F_2 кесиндисинин тең ортосуна жүргүзүлгөн перпендикуляр сызыгын тандап алабыз. Эки фокустун аралыгын 2c деп белгилесек, анда алардын координаталары $F_1(-c;0)$ жана $F_2(c;0)$ болот.



$M(x;y)$– эллипске тиешелүү болгон каалаган чекит болсун. Турактуу чоңдукту 2a деп белгилесек

$|F_1M|+|F_2M|=2a$ болот.

Эки чекиттин арасындагы аралыкты табуу формуласы боюнча

$$|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$|F_2M|=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Бул маанилерди жогорку формулага койсок:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-$ бул эллипстин берилген координата системасындагы теңдемеси болот. Пайда болгон теңдемени жөнөкөй түргө келтирүү үчүн бир топ өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ деп жазып, эки жагын тең квадратка көтөрөбүз:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

Кашааларды ачып, топтоштуруудан кийин

$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$ же $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$ болот.

Аныктоо боюнча $2c<2a$, же мындан $c<a$ болгондуктан $a^2-c^2>0$ болот. Демек, бул айырманы b^2 деп белгилөөгө болот. Анда акыркы барабардык $b^2x^2+a^2y^2=b^2a^2$ түрүнө келет. Эки жагын a^2b^2 ка бөлүп, эллипстин теңдемесинин жөнөкөй түрүн алабыз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$ Мында $b^2=a^2-c^2$.

Эллипстин теңдемесин изилдөө аркылуу анын бир топ маанилүү касиеттерин тактайбыз:

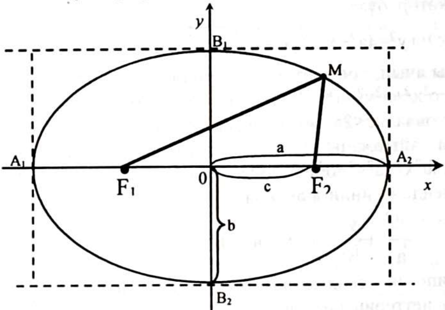
– Эллипстин теңдемесин x ке жана y ке карата чечсек $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ жана $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ болот. Эгер $|x|<a$ болсо, анда y модулу боюнча бирдей, бирок белгиси боюнча карама-каршы болгон эки мааниге ээ. Демек, x тин бир маанисине y тин жогоркудай эки мааниси табылат. Бул эллипстин графиги ox огуна карата симметриялуу экендигин билдирет.

  Ушул сыяктуу эле $|y|<b$ болгондо ар бир y үчүн эки маани бар болуп, эллипстин графиги oy огуна да симметриялуу экендиги келип чыгат.

– Эллипстин координата октору менен кесилишкен чекиттерин табуу үчүн y=0 жана x=0 теңдемелерин чыгарабыз. Анда $x_{1,2}=\pm a$, $y_{1,2}=\pm b$ болору келип чыгат. Демек, эллипс ox огу менен $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ чекиттеринде, ал эми oy огу менен $B_1(0;b)$ жана $B_2(0;-b)$ чекиттеринде кесилишет.

Эгер $|x|>a$ болсо, анда ага тиешелүү y тин анык маанилери жок, б.а. абциссасы $|x|>a$ болгон эллипстин чекиттери жок. Демек, эллипс, $x=+a$ жана $x=-a$ сызыктарынын ортосунда жайгашат. Ошондой эле $|y|<b$ учурду карасак, эллипстин $y=+b$ жана $y=-b$ сызыктарынын ортосунда жайгашарына ишенебиз.

Демек, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипси, жактары координата окторуна параллель болуп, узундуктары 2a жана 2b болгон, ал эми диагоналдары координата башталышында кесилишкен, тик бурчтуктун ичине сызылат. Жогорку касиеттердин жана аныктоонун негизинде эллипстин төмөндөгүчө графигин сызууга болот:



A_1, A_2, B_1, B_2- чокулары, O− борбору, F_1, F_2-фокустары,
$|A_1A_2|=2a-$ чоң огу, $|B_1B_2|=2b-$ кичине огу,
F_1M жана F_2M кесиндилери− фокалдык радиустары.

Аныктоо: $\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ катышы эллипстин экцентриситети деп аталат жана

е тамгасы менен белгиленет, б.а. $e=\frac{c}{a}$; $0<c<a$ болгондуктан

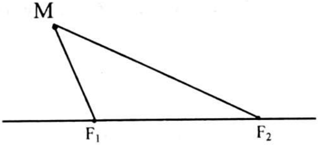
$0<e<1$. Аны табуу үчүн $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ формуласы

пайдаланылат.

Эксцентриситет эллипстин формасын мүнөздөйт. Эллипстин теңдемесинде a=b (жарым октору бирдей) болсо, анда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ же $x^2+y^2=a^2$ теңдемеси келип чыгат. Бул айлананын теңдемеси. Демек, айлана эллипстин жарым октору барабар жана экцентриситети нөль болгон айрым бир учуру.

3) Гипербола жана анын теңдемеси

Аныктоо: Ар бир чекиттен тегиздиктин эки чекитине чейинки аралыктардын айырмасы турактуу болгон, ошол тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду гипербола деп аталат.

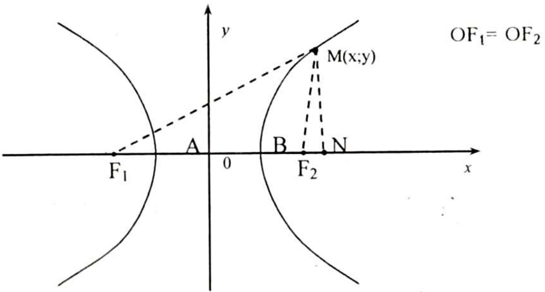


Эгер M чекити гиперболага тиешелүү болсо, анда

$$|MF_1|-|MF_2|=const$$

Мында F_1 жана F_2 чекиттери– гиперболанын фокустары. "Гипербола" деген сөз гректин сөзүнөн алынып, "ашыра чапкандык" же "чоңойтуп жиберүү" деген маанини билдирет.

Турактуу айырманы 2a, ал эми фокустардын арасындагы аралыкты 2c деп белгилейбиз. Эгер (F_1F_2) сызыгын улантсак, анда ал гиперболаны A жана B чекиттеринде кесип өтөт. AB кесиндиси гиперболанын чыныгы огу деп аталат. Анын узундугун табабыз.



Чиймедеги түзүү боюнча $AF_2-AF_1=2a$ жана $BF_1-BF_2=2a$ болгондуктан, аларды мүчөлөп кошуп $AF_2-AF_1+BF_1-BF_2=4a$ же $(AF_2-BF_2)+(BF_1-AF_1)=4a$ же $AB+AB=4a$ же $2AB=4a$, мындан $AB=2a$ экендиги келип чыгат. Демек, гиперболанын чыныгы огунун узундугу турактуу айырмага– анын ар бир чекитинен фокустарга чейинки аралыктардын айырмасына барабар.

Гиперболанын теңдемесин келтирип чыгарабыз: Фокустар аркылуу өткөн окту абцисса огу үчүн, ал эми F_1F_2 кесиндисинин тең ортосуна перпендикуляр болгон сызыкты ордината огу үчүн кабыл алабыз. Жогорку чийме боюнча

$$MF_1^2 = y^2+(c+x)^2$$
$$MF_2^2 = y^2+(x-c)^2$$

Буларды мүчөлөп кемитсек $MF_1^2-MF_2^2=4cx$ келип чыгат. Же $(MF_1+MF_2)(MF_1-MF_2)=4cx$. Мында $MF_1-MF_2=2a$ болгондуктан $2a\cdot(MF_1+MF_2)=4cx$

же $$MF_1+MF_2=2\frac{c}{a}x$$
$$MF_1-MF_2=2a$$

Акыркы эки барабардыкты мүчөлөп кошобуз.

$$2MF_1=2\frac{c}{a}x+2a \text{ же } MF_1=\frac{c}{a}x+a$$

MF_1 дин табылган маанисин жогорку формулага коюп, тиешелүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз:

$$(\frac{c}{a}x+a)^2=y^2+(c+x)^2$$

$$\frac{c^2}{a^2}x^2+a^2=y^2+c^2+x^2$$

же $$(\frac{c^2}{a^2}-1)x^2-y^2=c^2-a^2$$

же $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

Мында $c>a$, демек $c^2>a^2$ болгондуктан $e^2-a^2=b^2$ белгилөөсүнөн кийин

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

–бул гиперболанын изделүүчү теңдемеси.

Эллипс сыяктуу эле гипербола да түрдүү формага ээ, анын формасы да экцентриситети менен мүнөздөлөт. ($e=\frac{c}{a}$), $e>1$ болот.

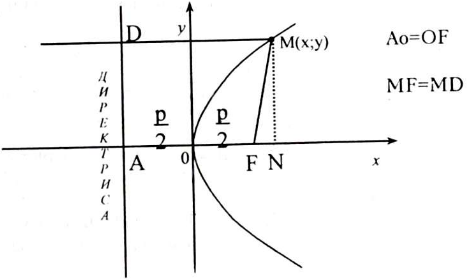
Эгер теңдемеде $a=b$ болсо, анда $x^2-y^2=a^2$ –бул бирдей октуу гиперболанын теңдемеси.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасы үчүн $y=\frac{b}{a}x$ жана $y=-\frac{b}{a}x$ түз сызыктары ассимптота болушат. $\frac{b}{a}$ катышы гиперболанын абалын аныктайт, кысылган жана жайылган гипербола болуп.

4) Парабола жана анын теңдемеси

Аныктоо: Тегиздиктеги фокус деп аталуучу бир чекит менен директриса деп аталуучу түз сызыктан бирдей аралыкта турган чекиттердин геометриялык орду парабола деп аталат.

«Директриса» сөзү «багыттоочу» деген мааниде. Фокустан директрисага перпендикуляр түшүрүп, ал кесиндинин узундугун p деп белгилейбиз. Ал перпендикуляр парабола менен O чекитинде кесилишип, параболанын <u>чокусун</u> билдирет.



Параболанын теңдемесин келтирип чыгаруу үчүн фокус аркылуу өтүп директрисага перпендикуляр болгон түз сызыкты абцисса огу, ал эми параболанын чокусу аркылуу директрисага параллель болгон түз сызыкты алабыз (ордината огун алабыз).

Эгер параболанын каалаган M(x;y) чекитин алсак, анда x=ON, y=MN жана |MF|=|MD| болот. Чийме боюнча

$|MF|^2=|NF|^2+|MN|^2=(x-\frac{p}{2})^2+y^2$

Ал эми $|MF|=|MD|=|MK|+|KD|=|NO|+|OA|=x+\frac{p}{2}$

болгондуктан, жогоркуга ордуна коюп

$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$ же $y^2=2px$

экендигин алабыз. Бул параболанын изделүүчү теңдемеси.

5) Экинчи тартиптеги сызык жана анын теңдемеси

Аныктоо: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ теңдемеси менен берилген сызык экинчи тартиптеги ийри сызык деп аталат. Мында A, B жана C коэффициенттеринин жок дегенде бири нөль эмес.

Жогоруда 1)– 4) пункттарда каралган сызыктардын бардыгы экинчи тартиптеги ийри сызыктар. Чындыгында

- айлана– $A=C=1$, $B=0$, $D=A_1$, $E=B_1$, $F=C_1$ болгондогу $x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0$ экинчи тартиптеги ийри сызык;
- эллипс– $A=b^2$, $B=0$, $C=a^2$, $D=E=0$, $F=-a^2b^2$ болгондогу, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ же $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийри сызык;
- гипербола– $A=b^2$, $B=0$, $C=-a^2$; $D=E=0$, $F=-a^2b^2$ болгондогу, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ же $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийри сызык;
- парабола– $A=B=0$, $C=1$, $D=-2p$, $E=F=0$ болгондогу, $y^2-2px=0$ теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги ийри сызык.

3. Мейкиндиктеги геометриялык фигуралар

1) Мейкиндиктеги түз сызыктардын өз ара абалы

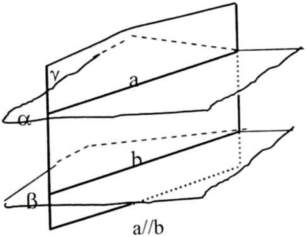
Тегиздиктеги түз сызыктардын өз ара жайгашуусу эки түрдүү гана болорун караганбыз: кесилишет жана параллель (дал келген учур да параллелдик учурга камтылат). Ал эми мейкиндикте төмөнкү учурлардын болушу мүмкүн:

А. Дал келишет– эгерде түз сызыктар жок дегенде эки жалпы чекитке ээ болушса.

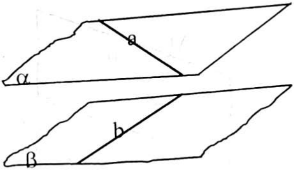
Б. Кесилишет– эгерде алар бир гана жалпы чекитке ээ болушса.

В. Параллель– бир тегиздикте жатып, жалпы чекиттери жок болсо.

Г. Кайчылаш– бир тегиздикте жатпайт жана жалпы чекиттери жок.

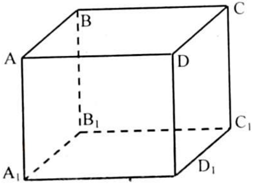


$a // b$



$a \dot{-} b$

Түз сызыктардын мейкиндиктеги өз ара жайгашуу абалдарын тик бурчтуу параллелопипеддин кырлары аркылуу да көрсөтүүгө болот:



(AB) жана (AD)–кесилишет,

(AB) жана (CD)–параллель,

(AB) жана (DD_1)–кайчылаш,

(AD), (CD) жана (DD_1)–кесилишет.

(BC), (AD) жана (A_1D_1)–параллель.

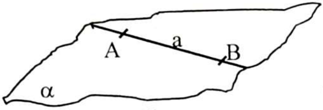
2) Түз сызык менен тегиздиктин мейкиндиктеги өз ара абалы

Мында үч учурдун гана болушу мүмкүн:

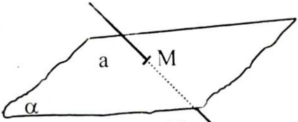
А. Түз сызык тегиздикте жатат– эгер түз сызыктын жок дегенде эки чекити тегиздикте жатса.

Б. Кесилишет– эгерде алардын бир гана жалпы чекити бар болсо.

В. Параллель– эгерде алардын жалпы чекиттери жок болсо.

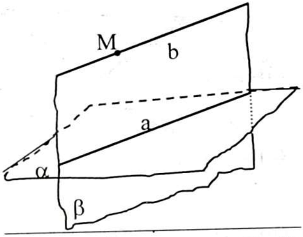


$a \subset \alpha$



$a \cap \alpha = M$

Бул учурдун бар экендигин төмөнкү теорема тастыктайт:



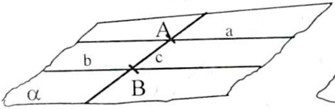
<u>Теорема</u>: Эгер тегиздикке тиешелүү болбогон түз сызык ошол тегиздиктеги кандайдыр бир түз сызык менен параллель болсо, анда ал түз сызык ошол тегиздиктин өзү менен да параллель, б.а. $a\subset\alpha$, $M\in\alpha$, $M\in b$, $b//a$ болсо, анда $\alpha//b$ болот.

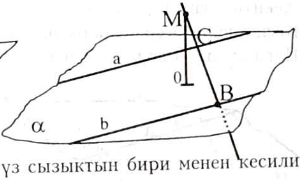
Бул теореманын тескерисинче болсун деп алып, оңой эле далилдөөгө болот.

Мейкиндиктеги түз сызык менен тегиздиктин параллелдигине байланышкан бир топ маанилүү касиеттер бар. Алар:

а) Мейкиндикте берилген тегиздикте жатпаган чекит аркылуу ал тегиздикке параллель болгон чексиз түз сызыктарды жүргүзүүгө болот.

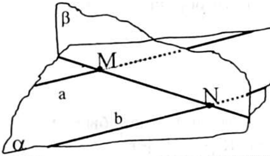
б) Эгер түз сызык эки параллель түз сызыктын бирөөсү менен кесилишсе, анда алардын экинчиси менен кесилишпей калышы да мүмкүн.

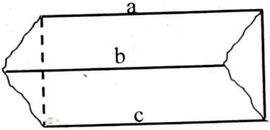




в) Эгер тегиздик эки параллель түз сызыктын бири менен кесилишсе, анда экинчиси менен да кесилишет.

г) Эгер эки түз сызык үчүнчү бир түз сызык менен параллель болушса, анда алар өз ара да параллель.





д) Тиешелүү жактары теңдеш параллель болгон мейкиндиктеги тар же кең бурчтар өз ара барабар.

3) Түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдуулугу жөнүндө теоремалар

Аныктоо: Эгер түз сызык тегиздикте жаткан бардык түз сызыктарга перпендикуляр болсо, анда ал берилген тегиздикке перпендикуляр деп аталат.

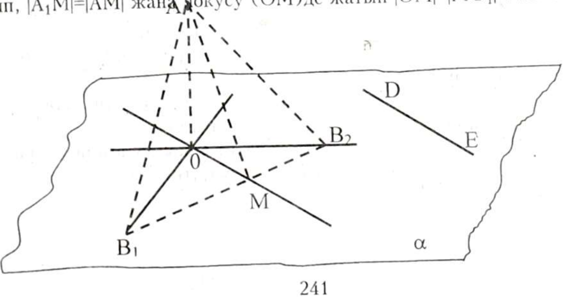
Түз сызыктын тегиздиктеги бардык түз сызыктарга перпендикуляр экендигин практика жүзүндө тактоо дээрлик мүмкүн эмес. Ошондуктан төмөнкү теореманы карап көрөлү:

Теорема: Эгер түз сызык тегиздиктеги эки кесилишүүчү түз сызыктарга перпендикуляр болсо, анда ал ошол тегиздиктеги ар кандай үчүнчү түз сызыкка да перпендикуляр болот.

Берилди: $(B_1O)\subset\alpha$, $(B_2O)\subset\alpha$, $(B_1O)\cap(B_2O)=0$.
$(AO)\perp(B_1O)$, $(A0)\perp(B_2O)$.
$(DE)\subset\alpha$.

Далилдөө керек: $(A0)\perp(DE)$.

Далилдөө: Далилдөө үчүн α тегиздигинде $(DE)//(OM)$, $|B_1M|=|B_2M|$ боло турган (B_1B_2) түз сызыгын жүргүзөбүз. Анда чиймеде $AB_2A_1B_1$ жана $OB_2O_1B_1$ параллелограммдары пайда болот (A_1 чокусу (AM)де жатып, $|A_1M|=|AM|$ жана чокусу (OM)де жатып $|OM|=|MO_1|$ болот).



Параллелограммдын диоганалдарынын касиети боюнча

$$|AA_1|^2+|B_1B_2|^2 = 2|AB_1|^2+2|AB_2|^2$$

$$|OO_1|^2+|B_1B_2|^2 = 2|B_1O|^2+2|OB_2|^2$$

же

$$2|AM|^2+|B_1B_2|^2 = 2|AB_1|^2+2|AB_2|^2$$

$$2|OM|^2+|B_1B_2|^2 = 2|B_1O|^2+2|OB_2|^2$$

Мүчөлөп кемитебиз да Пифагордун теоремасын пайдаланабыз:

$$4(|AM|^2-|OM|^2)=2(|AB_1|^2-|B_1O|^2)+2(|AB_2|^2-|OB_2|^2)=$$

$$=2|AO|^2+2|AO|^2=4|AO|^2$$

же $$|AM|^2-|OM|^2=|AO|^2$$

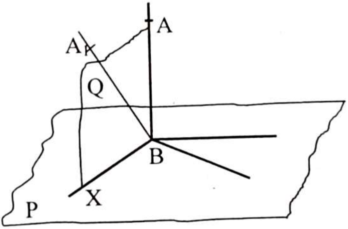
Акыркы формула AOM бурчунун тик бурч экендигин көрсөтөт. б.а. $(AO)\perp(OM)$. Түзүү боюнча $(OM)//(DE)$ болгондуктан $(AO)\perp(DE)$.

Демек, түз сызык тегиздикке перпендикуляр болушу үчүн ал тегиздиктеги эки кесилүүчү түз сызыкка перпендикуляр болушу жетиштүү.

Теорема: Түз сызыктын берилген чекитинен ага перпендикуляр болгон бир гана тегиздик жүргүзүүгө болот.

Тегиздиктеги B чекити аркылуу (AB)га перпендикуляр болгон чексиз сандагы кесилишкен түз сызыктар өтөт. Алар P тегиздигинде жатышат.

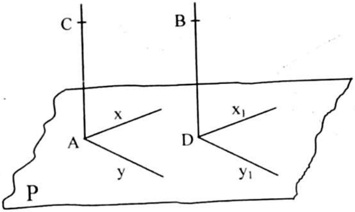
P тегиздигинин жалгыз экендигин билүү үчүн, тескерисинче алар экөө болсун деп алабыз, б.а. (AB) жана (BX) кесилишкен түз сызыктары аркылуу кандайдыр бир S тегиздиги да бар болсун. Q жана S тегиздиктери B жалпы чекитке ээ болгондуктан, (BY) жалпы түз сызыгына да ээ болушат. Шарт боюнча (BX) жана (BY) түз сызыктары S тегиздигинде жатып, (AB)га перпендикуляр болушат–

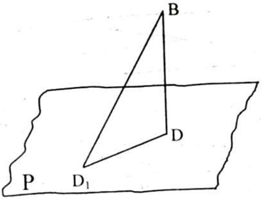


Мындай болушу мүмкүн эмес.

Демек, (AB) түз сызыгынын B чекити аркылуу ага перпендикуляр болгон бир гана P тегиздиги өтөт.

Теорема. Тегиздиктен четте жаткан чекит аркылуу ага перпендикуляр болгон бир гана түз сызык жүргүзүүгө болот.





а) P тегиздигин жана андан четте жаткан B чекитин алабыз. Далилдөө үчүн бир топ кошумча түзүүлөрдү жүргүзөбүз: P тегиздигинен A чекитин алып, $(AC)\perp P$ ны, B чекитинен $(BD)//(AC)$ ны жүргүзөбүз; P тегиздигинде каалагандай (AX) жана (AY) түз сызыктарын жүргүзөбүз. Анда $(AC)\perp(AX)$ жана $(AC)\perp(AY)$ болот.
Эгерде P тегиздигинде $(DX_1)//(AX)$ жана $(DY_1)//(AY)$ болгон (DX_1) жана (DY_1) терди жүргүзсөк, анда жогорку теоремалар боюнча $(BD)\perp(DX_1)$ жана $(BD)\perp(DY_1)$ болот. б.а. $(BD)\perp P$.

б) Бул перпендикулярдын жалгыздыгы тескери ыкма менен оңой эле далилденет. б.а. эгер андай перпендикуляр экөө болсун десек (BD) жана (BD_1), анда ΔBDD_1 ден $\angle BDD_1+\angle BD_1D+\angle D_1BD=d+d+\gamma>2d$ болору келип чыгат. Мындай болууга мүмкүн эмес.

4) Мейкиндикте тегиздиктердин өз ара жайгашуусу

Тегиздиктер мейкиндикте өз ара үч абалда болушу мүмкүн:

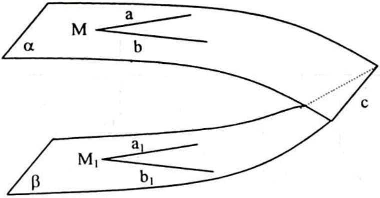
А. Дал келишет– жок дегенде үч жалпы чекитке ээ болушса;

Б. Кесилишет– бир жалпы чекитке ээ болушса, анда алар ошол чек аркылуу өткөн түз сызык аркылуу кесилишет;

В. Параллель– жалпы чекиттери жок болсо.

Мейкиндиктеги эки параллель тегиздик менен байланышкан айрым касиеттерди карайбыз:

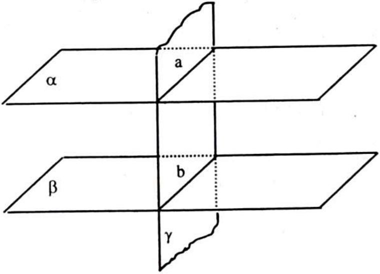
Теорема: Эгер эки тегиздик тендеш параллель болгон кесилүүчү түз сызыктар аркылуу өтсө, анда алар өз ара параллель болушат.



$$\begin{array}{c} a//a_1,\ b//b_1\\ a,b\subset\alpha,\ a_1,b_1\subset\beta,\\ a\cap b=M,\ a_1\cap b_1=M_1,\\ \hline \alpha//\beta \end{array}$$

Бул теореманы $\alpha\cap\beta=c$ болсун деп алып, жеңил эле далилдөөгө болот.

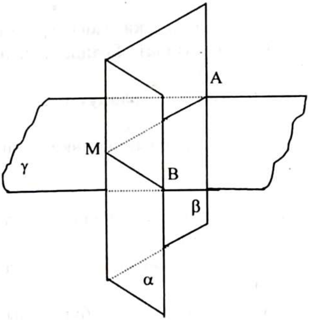
Теорема: Эгер эки параллель тегиздик үчүнчү бир тегиздик менен кесилишсе, анда алардын кесилишкен түз сызыктары параллель болушат.



$$\begin{array}{c} \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\\ \alpha//\beta\\ \hline a//b \end{array}$$

Чындыгында эле a жана b сызыктары γ тегиздигинде жатышып, жалпы чекитке ээ эмес. Эгер жалпы чекитке ээ болушса анда α жана β тегиздиктери параллель болбой калмак.

Аныктоо: Бир түз сызыктан чыгуучу эки жарым тегиздик аркылуу пайда болгон фигура эки грандуу бурч деп аталат. Түз сызык– анын кыры, жарым тегиздиктер– анын грандары болот.



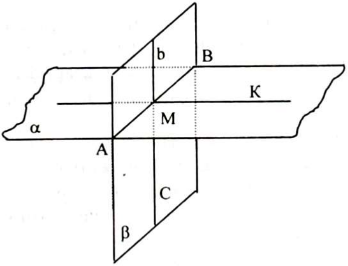
Эгер эки грандуу бурчтун кырына перпендикуляр болгон γ тегиздигин жүргүзсөк, анда пайда болгон AMB бурчу берилген эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу деп аталат.

Эки грандуу бурчтар өздөрүнүн сызыктуу бурчтары менен ченелери анык.

5) Перпендикуляр тегиздиктер

Аныктоо: Эгер эки тегиздик кесилишип, тик эки грандуу бурч түзсө, анда алар өз ара перпендикуляр деп аталышат.

Теорема: Эгер тегиздик берилген тегиздикке перпендикуляр болгон түз сызык аркылуу өтсө, анда ал тегиздик да берилген тегиздикке перпендикуляр болот.



$$\frac{b\subset\beta,\ b\perp\alpha \quad \alpha\cap\beta=(AB)}{\alpha\perp\beta}$$

M чекити α тегиздиги менен b түз сызыгынын кесилишикен чекити.

Эгерде α тегиздигинде $(MK)\perp(AB)$ жүргүзсөк, анда $(MK)\perp b$ болот. Демек, KMC бурчу тик бурч, б.а. $\alpha\perp\beta$.

b түз сызыгы аркылуу өтүүчү, α тегиздигине перпендикуляр болгон тегиздиктердин саны чексиз экендиги анык.

6) Мейкиндиктеги жөнөкөй көп грандыктар жана алардын айрым касиеттери.

Аныктоо–1: Көп грандуу бет деп, грандары деп аталган көп бурчтуктардын чектүү көптүгүнүн жыйындысы аталат. Мында каалаган гранынын ар бир жагы ошол гана гранга тиешелүү болсо, анда ал чектөөчү кыры деп аталат; эгер эки гана гранга тиешелүү болсо, анда ал ички кыры деп аталат. Грандарынын чокулары бул беттин чокулары деп аталышат.

Аныктоо–2: Бардык кырлары ички кыр болгон көп грандуу бет көп грандык деп аталат.

Аныктоо–3: Төмөнкү касиеттерге ээ болгон көп грандык жөнөкөй көп грандык деп аталат:

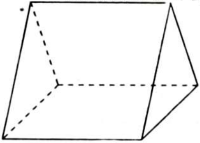
1) бардык грандары–жөнөкөй көп бурчтуктар;
2) көп грандыктын кырлары жалпы ички чекиттерге жана грандары менен жалпы чекиттерге ээ эмес;
3) көп грандыктын чокулары кырларынын жана грандарынын ички чекиттери эмес;
4) жалпы чокуга ээ болгон грандарынын жалпак бурчтары бир көп грандуу бурч түзөт.

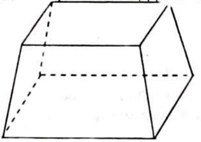
Аныктоо–4: Эгер көп грандыктын бардык грандары анын каалаган граны аркылуу өткөн тегиздиктин бир жагында гана жатса, анда ал томпок көп грандык деп аталат. Эгер экинчи жагында жок дегенде бир граны жатса– томпок эмес.

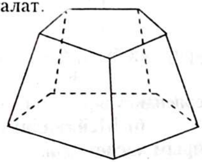
Көп грандыктар грандарынын санына жараша 4,5,6,7,... грандуу болушат.

Бирдей аттуу жана түрдүү аттуу көп бурчтуктар менен чектелген жөнөкөй көп грандыктар кездешет. Мисалы, көп грандыктардын бардык грандары үч бурчтуктар, төрт бурчтуктар, беш бурчтуктар, ж.б. болушу мүмкүн (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр, ж.б.).

Аныктоо–5: Негиздери деп аталуучу эки граны (бирдей аттуу болуштары шарт эмес) параллель тегиздиктерде жаткан, ал эми калган грандарынын чокулары жогорку же төмөнкү негиздеринин чокулары менен дал келген үч бурчтуктар жөнөкөй көп грандык призматоид деп аталат.

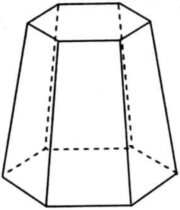


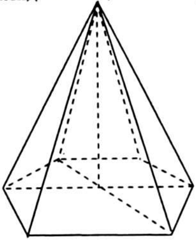


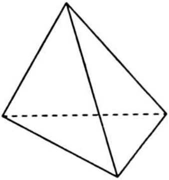


Аныктоо–6: Негиздери окшош жөнөкөй көп бурчтуктар, ал эми каптал грандары трапеция болгон призматоид кесилген пирамида деп аталат. Эгер негиздери туура көп бурчтуктар, ал эми бийиктиги негиздеринин борборлору аркылуу өтсө, анда ал туура кесилген пирамида деп аталат.

Аныктоо–7: Бир негизи чекит болгон призматоид пирамида деп аталат. Эгер негизинде туура көп бурчтук жатып, бийиктиги негизинин борбору аркылуу өтсө, анда ал туура пирамида деп аталат. Туура пирамиданын эң жөнөкөйү– тетраэдр.







Аныктоо–8: Негиздери барабар көп бурчтуктар, ал эми каптал грандары параллелограммдар болгон призматоид призма деп аталат.

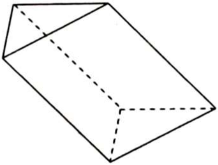
Призманын каптал кырлары анын негиздеринин тегиздиктерине перпендикуляр же перпендикуляр эмес болушуна жараша призмалар тик же жантык болушат. Эгер призманын негиздери туура көп бурчтуктар болуп, бийиктиги негиздеринин борборлору аркылуу өтсө, анда призма туура призма болот.

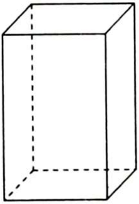
Призманын практикада көбүрөөк кездешкен түрлөрү:

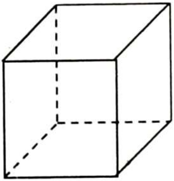
а) Параллелепипед– негиздери параллелограмм болгон призма. Алар да тик жана жантык болушат;

б) Тик бурчтуу параллелипипед– грандары тик бурчтуктар;

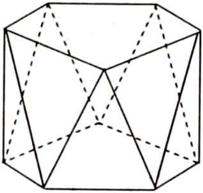
в) Куб– бардык грандары квадраттар.







Аныктоо–9: Негиздери барабар көп бурчтуктар, ал эми каптал грандары жалаң үч бурчтуктар болгон призматоид антипризма деп аталат.



Антипризмалар да туура болушат, эгерде негиздери туура көп бурчтуктар болуп, негиздеринин борборлорун туташтырган кесинди негиздин тегиздигине перпендикуляр болсо.

XIII ГЛАВА

Чоңдуктар жана аларды ченөө

1. Чоңдуктар жөнүндө түшүнүк жана алардын негизги касиеттери

Бизди курчап турган чөйрөнүн бирден-бир маанилүү өзгөчөлүгү– анын дайыма жана түрдүүчө өзгөрүп турушу болуп эсептелет. Адамдардын жашоо шарты, коом, климат, жаратылыштагы өсүмдүктөр жана айбанаттар дүйнөсү дайыма өзгөрүп турушу бизге белгилүү. Алардын өзгөрүү процесстерине илимий негизде түшүндүрмөлөр берүү үчүн аларга таандык болгон узундук, масса, аянт, көлөм, убакыт, ылдамдык, температура сыяктуу касиеттерин окуп үйрөнүүгө туура келет. Бул аталган касиеттер– чоңдуктар. Чоңдуктар– чөйрөдөгү реалдуу обьектилердин жана кубулуштардын өзгөчө касиеттери. Мисалы, нерселердин оордукка ээ болуу касиети алардын массасы болот. Жалаң гана жалпак беттерге тиешелүү болгон касиет– алардын аянты. Кыймылдагы нерселер гана ылдамдыкка ээ.

Айрым учурда чоңдук нерсенин (телонун) тигил же бул касиетинин чени катарында да каралат б.а. тигил же бул касиети сандык жактан чоңдук аркылуу туюнтулат. Мисалы, инерттүүлүк– бул берилген күчтө телонун ылдамдануусунун маанисин аныктоочу ички касиети. Ал эми инерттүүлүктүн чени– масса.

Чоңдуктар өзүлөрүнүн табияттарына жараша бир тектүү жана түрдүү тектүү, болушат. Бир тектүү чоңдуктар– кандайдыр бир нерселердин көптүгүнүн бир эле касиетин мүнөздөшөт. Ал эми ар башка касиеттери түрдүү тектүү чоңдуктар менен мүнөздөлөт. Мисалы, кесиндилердин узундуктары бир тектүү, ал эми аянт, көлөм– түрдүү тектүү чоңдуктар.

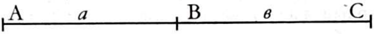
Узундук, аянт, көлөм, масса сыяктуу чоңдуктар төмөнкү касиеттерге ээ:

1. Ар кандай бир тектүү чоңдуктарды салыштырууга болот: алар же барабар, же бири экинчисинен чоң, б.а. бир тектүү чоңдуктардын көптүгүндө «барабар», «чоң» жана «кичине» катнаштыктары орун алышат. Ар кандай а же в чоңдуктары үчүн а=в, а>в, а<в катнаштыктарынын бири гана аткарылат.

   Мисалы, дептердин барактарынын аянттары бирдей, тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы, анын катетинен узун. Жерден Айга чейинки аралык Күнгө чейинки аралыктан кыска.
2. Бир тектүү чоңдуктары кошууга болот, натыйжада ошондой эле тектүү чоңдук келип чыгат. б.а. ар кандай бир тектүү а жана в

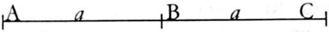
чоңдуктары үчүн а+в чоңдугу бир маанилүү аныкталат жана ал а жана в чоңдуктарынын суммасы деп аталат.

Мисалы, эгер АВ кесиндисинин узундугу а, ал эми ВС кесиндисиники в болсо, анда АС кесиндисинин узундугу АВ жана ВС кесиндилеринин узундуктарынын суммасы болот.



3. Чоңдукту анык санга көбөйтүүгө болот, натыйжада ошол эле тектеги чоңдук келип чыгат. Б.а. ар кандай а чоңдугу жана терс эмес анык х саны үчүн бир гана в=х а чоңдугу бар болот. в чоңдугу а чоңдугу менен х санынын көбөйтүндүсү деп аталат.

Мисалы, АВ кесиндисинин узундугу а ны х=2 анык санына көбөйтсө, АС кесиндисинин узундугу болгон 2а чоңдугу келип чыгат.



4. Бир тектүү чоңдуктарды кемитүүгө болот. алардын айырмасы сумма аркылуу төмөнкүчө аныкталат: эгер а=в+с болсо, анда с чоңдугу а жана в чоңдуктарынын айырмасы деп аталат.

Мисалы, АС кесиндисинин узундугу а, АВ нын узундугу в болсо, анда ВС кесиндисинин узундугу АС жана АВ кесиндилеринин узундуктарынын айырмасы болот.

5. Бир тектүү чоңдуктарды бөлүүгө болот, тийиндиси чоңдуктун анык сан менен болгон көбөйтүндүсү аркылуу төмөнкүчө аныкталат: а жана в чоңдуктарынын тийиндиси деп, а=в х барабардыгы аткарыла турган терс эмес х анык саны аталат.

Мисалы, жогорку чиймедеги АС жана АВ кесиндилеринин узундуктарынын тийиндиси (катышы) 2 анык саны болот.

3 жана 5 касиеттердин негизинде чоңдукту терс эмес анык санга бөлүү жөнүндө да сөз кылууга болот.

2. Чоңдуктарды ченөө түшүнүгү

Чоңдуктарды бири-бири менен түздөн-түз салыштыруу аркылуу алардын бирдей же бирдей эмес экендигин тактоо, айрым учурда такыр мүмкүн эмес. Мисалы, жер участкаларынын аянттарын беттештирүү аркылуу салыштырууга болбойт.

Салыштыруу учурунда так маалымат алуу ошол бир тектүү чоңдуктарды ченөө зарылчылыгын туудурат. Мисалы, бир нерсенин массасы ошондой эле экинчи бир нерсенин массасынан канчага көп же аз экендигин аларды өлчөө аркылуу гана билүүгө болот.

Тигил же бул чондукту өлчөө– бул аны бирдик катары кабыл алынган ошондой тектүү чондук менен салыштыруу болот. Мисалы, мектептен үйгө чейинки аралыкты (узундукту) кадам, саржын, метр сыяктуу аралыктар (узундуктар) менен салыштырышат.

Салыштыруу процесси каралып жаткан чондуктун тегине жараша ар башка жүрөт: нерсенин массасын ченөө процесси убакытты ченөө процессинен такыр башкача. Бирок, ал процесс кандай гана болбосун, чондукту ченөөнүн натыйжасы, тандалып алынган бирдикте, белгилүү бир сан мааниге ээ болот.

Жалпы учурун карасак:

Эгер а чондугу берилип, е анын бирдиги катары тандалып алынса, анда а чондугун ченөөнүн натыйжасында а=х е барабардыгы аткарыла турган х анык саны табылат. х саны а чондугунун е бирдигиндеги сан мааниси деп аталат.

Акыркы сүйлөмдү $x=m_e(a)$ деп шарттуу түрдө жазышат. Бул аныктоого ылайык ар кандай чондукту, кандайдыр анык сан менен анын бирдигинин көбөйтүндүсү түрүндө жазууга болот.

Мисалы, 15м= 15 1м, 7кг=7 1кг

Булардын негизинде чондуктун бир бирдигинен экинчи бирдигине өтүү процессин келтирип чыгарууга болот. айталы $\frac{5}{12}$ саатты минута менен туюнтуу керек болсун.

$\frac{5}{12}$ саат= $\frac{5}{12}$ 1 саат жана 1 саат= 60 минута болгондуктан $\frac{5}{12}$ саат=$\frac{5}{12}$ 60 мин.= ($\frac{5}{12}\cdot 60$) мин=25 мин.

Бир гана сан мааниси менен аныкталган чондуктар скалярдык чондуктар деп аталышат. Мындай чондуктарга мисал болуп узундук, аянт, көлөм, масса ж.б. эсептелишет.

Илимде скалярдык чондуктардан башка вектордук чондуктар да каралат. Векторлор жөнүндө толук маалымат болсун үчүн алардын сан маанисин гана билүү жетишсиз. Ал үчүн вектордук чондуктун багытын да билүү зарыл болот. Күч, ылдамдык, салмак, электр талаасынын чыналуусу ж.б. вектордук чондуктар болушат.

Мындан ары сан мааниси оң сан болгон скалярдык чондуктар гана каралат. Чондуктарды ченөө аларды салыштыруу процессин сандарды салыштырууга, чондуктар менен болгон операцияларды сандар менен болгон операцияларга алып келет. Ошондуктан:

1. Эгер а жана в чоңдуктары е бирдиги менен ченелишсе, анда алардын арасындагы катнаштыктар алардын сан маанилеринин ортосундагы катнаштыктар менен бирдей болот жана тескерисинче:

   $a=в <=> m_e(a)= m_e(в)$

   $a<в <=> m_e(a)< m_e(в)$

   $a>в <=> m_e(a)> m_e(в)$

   Мисалы, эгер эки нерсенин массалары а=5кг жана в=4кг болсо, анда 5>4 болгондуктан а>в болот.

2. Эгер а жана в чоңдуктары е бирдиги менен ченелишсе, анда а+в суммасынын сан маанисин табуу үчүн а жана в чоңдуктарынын сан маанилерин кошуп коюу керек:

   $a+в=c <=> m_e(a+в) = m_e(a)+m_e(в)$

   Мисалы, эгер а=16м, в=19м болсо,

   анда а+в=16м+19м= =(16+19)м= 35м.

3. Эгер в=х а боло турган а жана в чоңдуктары берилсе (х− оң анык сан) жана а чоңдугу е бирдиги менен ченелсе, анда е бирдигиндеги в чоңдугунун сан маанисин табуу үчүн х санын $m_e(a)$ санына көбөйтүп коюу жетиштүү:

   $в=х\ a <=> m_e(в)= х\ \ m_e(a)$

   Мисалы, эгер в нын массасы а нын массасынан 3 эсе чоң болсо, б.а. а=2кг жана в=3а болсо,

   анда в=3а =3 (2кг)= (3 2)кг= 6 кг

3. Бирдиктер системаларынын өнүгүшү женүндөгү тарыхый маалыматтардан

Адамзаты мурдатан бери эле чоңдуктарды мүмкүн болушунча так ченөөнүн зарыл экендигин сезип келет. Аларды туура ченөөнүн негиздери болуп, чоңдуктардын так аныкталган ыңгайлуу бирдиктери жана, ал бирдиктерди туура чагылдырган эталондор (үлгүлөр) эсептелишет. Эталондордун тууралыгы, тактыгы илимдин, техниканын, өнөр жайдын жана кадрлардын илимий-техникалык деңгээли менен ченелет.

- Бирдиктер системаларынын өнүгүү тарыхынын бир нече мезгилин өзгөчө бөлүп көрсөтүүгө болот.

Бул мезгилдердин эң байыркысында чоңдуктардын чен бирдиктери үчүн адамдын дене мүчөлөрү (колдун манжалары, чыканак, буттун тапаны, ж.б.) же аны курчап турган өтө тааныш нерселер (бир ат (тай) чабым, бир чакырым, бир чака, кап, ...) пайдаланылган.

XII-XVI кылымдарда соода-сатыктын өнүгүшү бир кыйла обьективдүү болгон, атайын кабыл алынган, чен бирдиктер колдонула баштаган. Мисалы, Орто Азия элдеринде массанын бирдиги катарында кадак (400гр.), чексе (6кг.), пуд (16кг), чейрек (100кг), чоңдуктары (айрым жерлерде ушул мезгилге чейин пайдаланышат); Англияда дюйм (3 арпанын узундугу), фут (64 арпанын капталынан коюлган узундугу); карат (боб дарагынын бир данынын массасы– бул бирдик ушул мезгилде да баалуу таштардын масса бирдиги катары колдонулат), Россияда узундук бирдиктери катары миля, верста, сажень, аршин сыяктуу бирдиктер колдонулган.

Жогоруда көрсөтүлгөндөй бир чоңдук үчүн ар түрдүү мамлекеттерде башка-башка чен бирдиктер колдонулган. Ал гана эмес бир эле мамлекеттин ичинде бир нече өлчөө бирдиктери кездешкен– бул айрыкча Франция мамлекетине мүнөздүү. Чен бирдиктеринин түрдүүчө болушу өндүрүштүн, илимий прогресстин жана соода иштеринин өнүгүшүнө терс таасирин тийгизген.

Жогорудагыдай мүчүлүштүктөрдү жөнгө салуу XVIII кылымдын аягында Францияда башталган. Анда бир топ негизги чоңдуктар үчүн чен бирдиктер кабыл алынып, биринчи жолу чен бирдиктер системасы пайда болгон. Бул системада узундуктун негизги бирдиги катарында метр– Жер шарынын нөлүнчү меридианынын кырк миллиондон бир бөлүгү кабыл алынган. Аянттын бирдиги үчүн, ар-жагы 10 м болгон квадраттын аянты; сыйымдуулуктун бирдиги үчүн литр-кыры 0,1м болгон кубдун көлөмү; массасынын бирдиги үчүн грамм- кыры 0,01м болгон кубдагы таза суунун массасы кабыл алынган. Ал эми башка туунду бирдиктер гректин мириа (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}) деген сөздөрүнүн жардамы менен негизги бирдиктерден пайда болгон.

Жогорку принципте түзүлгөн бирдиктер системасы, узундук бирдиги болгон метр менен тыгыз байланышта болгондуктан бирдиктердин (чендердин) метрдик системасы деп аталып жүрөт. Бул системаны түзүүдө ошол мезгилдин атактуу окумуштуулары– Ж.Лагранж, П.Лаплас, Т.Монж, Ж.Борд жана башкалардын кызматы чоң.

Бирдиктердин метрдик системасын кабыл алуу өтө узак мезгилди камтыйт. Метрдик конвенцияга 1875-жылы (кабыл алынгандан 100 жыл өткөндө!) 17 гана мамлекет, 1988-жылы 60 гана мамлекет кол койгон.

Россияда улуу окумуштуу Д.И.Менделеев тарабынан даярдалган метрдик системага өтүү жөнүндө законго 1899-жылы кол коюлган, ал эми РСФСР да 1918-жылы, СССРде 1925-жылы өтүү жөнүндө токтом кабыл алынган.

XVIII кылымда түзүлгөн бул система өз доорунун талаптарынын толук канааттандырганы менен улам барган сайын илим менен өндүрүштүн өнүгүшү ага толуктоолорду жана өзгөртүүлөрдү киргизүүнү талап кыла баштады. XX кылымдын орто ченинде илимде бир топ бирдиктер системалары пайда боло баштады. Бул эл аралык экономикалык жана илимий байланыштардын жүрүшүнө, өнүгүшүнө түздөн-түз тоскоолдуктарды пайда кылды. Бул проблемаларды чечүү боюнча 1921-жылы түзүлгөн Эл аралык чен-бирдиктер бюросу чоң иштерди жасады. Натыйжада, 1960-жылы бирдиктердин XI Генералдык конфенциясында бирдиктердин эл аралык системасын (СИ) кийирүү жөнүндө чечим кабыл алынган.

СИ– система интернациональная.

Кошумча маалыматтар:

1 пуд= 16 кг 380 г (орусча варианты)
1 карат= 2 10^{-4} кг
1 дюйм= 2 см 54 мм.
1 ярд= 91,44 см (Англия)
1 миль= 1852 м.

4. Бирдиктердин эл аралык системасы

Бирдиктердин эл аралык системасы– бул илимдин, техниканын жана экономиканын бардык тармактары үчүн иштелип чыккан жалгыз гана универсалдык система болуп эсептелет. Мындай системага болгон керектөө, суроо-талап жана муктаждык өтө көп болгондуктан бул система эл аралык масштабда тез эле колдоого алынды.

Системанын негизин жети негизги бирдик (метр, килограмм, секунда, ампер, Кельвин, моль жана кандела) жана эки кошумча бирдик (радиан жана стерадиан) түзөт. Бирдиктердин метрдик системасындагы айрым бирдиктер, илим-техниканын өсүшүнө байланыштуу, бир топ такталды. Мисалы, метр вакуумдагы жалпак электро-магниттик толкундун $\frac{1}{299792458}$ секундада басып өткөн жолу катары алынат.

1960-жылга чейин секунда Жердин өз огунун айланасында айлануу убактысына байланыштуу б.а. күндүк сутканын $\frac{1}{86400}$ бөлүгү катары аныкталган. Бул– бизге белгилүү болгон убакыт бирдиктеринин өз ара катнаштыктарын сактоо максатында болгон. Мындай эсептөө боюнча бир суткада 24 саат же 1440 минута же 86400 секунда бар болот.

1960-жылы бирдиктердин Генералдык конвенциясы тарабынан убакыт бирдигин Күн жылына б.а. Жердин Күндүн айланасында бир толук айланууга кеткен убакытка карата аныктоо боюнча чечим кабыл алынган. Бул эсептөө боюнча секунда Күн жылынын $\frac{1}{3156925,9747}$ бөлүгүнө барабар. Бирок, секунданы ушундай жол менен аныктоо да окумуштууларды бир топ себептер менен тактык жагынан канааттандырган эмес. Ошондуктан, 1967-жылы секунда төмөнкүчө аныкталган: Цезий–133 элементинин атомунун негизги абалындагы өтө жука эки катмарларынын ортосунда өтүү учурундагы нурдануунун 9192631770 мезгили бир секундага барабар.

Азыркы учурда секунданы аныктоонун мындан да тагыраак жолдору бар.

Чоңдуктардын калган бирдиктери негизги бирдиктерди 10, 10^2, 10^3, 10^4,... эсе чоңойтуу же кичирейтүү менен пайда болот. Аталыштары негизги бирдиктин аталыштарына гректин төмөнкү сөздөрүн кошуп айтуу менен пайда болот: мега (10^6), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}), микро (10^{-6}), нано (10^{-9}).

Узундук, масса жана убакыт чоңдуктары аркылуу аныкталган чоңдуктар туунду чоңдуктар деп аталат. Мисалы:

1. Аянт. Негизги бирдиги– квадраттык метр ($м^2$). Кошумча бирдиктери– $км^2$, $дм^2$, $см^2$, $мм^2$, гектар (га), ар (а).
2. Көлөм, сыйымдуулук. Негизги бирдиги– кубдук метр ($м^3$) Кошумча бирдиктери– $дм^3$, $см^3$, $мм^3$, литр (л), гектолитр (гл), мл. $1л=1 дм^3$.
3. Ылдамдык. Негизги бирдиги– секундасына метр (м/с). Кошумча бирдиктери– км/с, км/мин, дм/с, см/с, ж.б.

Чоңдуктардын бирдиктери, алардын аталыштары, белгилениши жана колдонуу эрежелери ар бир мамлекет үчүн өзүнүн мамлекеттик стандарты тарабынан бекитилет жана көзөмөлгө алынат.

Ал комитет Эл аралык системанын бирдиктеринен башка да айрым бирдиктерди пайдалануу жөнүндө чечим кабыл алат. Мисалы, массанын бирдиги үчүн тоннаны (т); убакыттын бирдиги үчүн минута, саат, сутка, ай, жума, жыл, кылым; температура үчүн Цельсия бирдиктери да пайдаланылат.

Терминдерди туура колдонуу да Мамлекеттик стандарт тарабынан көзөмөлгө алынат. Мисалы, «чоңдуктун бирдиги» дебестен, «чоңдуктун чен бирдиги» деп айтуу туура болот.

5. Кесиндинин узундугу жана аны ченөө

Аныктоо: Төмөнкү шарттарды канааттандырган жана ар бир кесинди үчүн аныкталган оң чоңдук кесиндинин узундугу деп аталат:

1) барабар кесиндилер бирдей узундукка ээ;

2) эгер кесинди чектүү сандагы кесиндилерден куралса, анда анын узундугу ошол кесиндилердин узундуктарынын суммасына барабар.

Кесиндилердин узундуктарын ченөө процессин толугураак, карап көрөлү:

Кандайдыр бир a кесиндиси берилип, анын узундугун ченөө керек болсун. Ал үчүн кесиндилердин көптүгүнөн узундуктун бирдиги үчүн кандайдыр бир e кесиндисин тандап алабыз. a кесиндисинин бир учунан e кесиндисин удаалаш аягына чейин коебуз. Эгер e кесиндиси a га n жолу коюлуп, акыркы учтары дал келишсе, анда a кесиндисинин узундугу n натуралдык санына барабар деп айтышат жана a=ne деп жазышат. Эгер e бирдик кесинди a га n жолу коюлуп, дагы калып калган болсо, анда ал калдык кесиндиге $e_1 = \frac{e}{10}$ кесиндисин жогоркудай кое баштайбыз. Эгер ал n_1 жолу так коюлса, анда a=n, n_1e болот жана a кесиндисинин узундугу чектүү ондук бөлчөккө барабар болот. Эгер e_1 кесиндиси n_1 жолу коюлуп, дагы калдык кесинди калып калса, анда ага $e_2 = \frac{e_1}{10} = \frac{e}{100}$ кесиндисин кое баштайбыз. Эгер бул процесс чексизге чейин уланган болсо, анда a кесиндисинин узундугу чексиз ондук бөлчөк түрүндө туюнтулат.

Демек, тандалып алынган бирдикте берилген кесиндинин узундугу оң анык сан менен туюнтулат. Бул айтылыштын тескериси да чын болот, б.а., эгер n,n_1,n_2,... анык оң саны берилсе, анда анын белгилүү тактыкка чейинки жакындатылган маанисин алып жана анын жазылышында чагылдырылган түзүүнү жүргүзүү менен, сан мааниси n,n_1,n_2,... бөлчөгү болгон кесинди пайда болот.

Демек, жүргүзүлгөн талкуулар кесиндинин узундугунун төмөнкү касиетинин тууралыгын далилдейт:

1. Тандалып алынган узундук бирдигинде ар кандай кесиндинин узундугу оң анык сан менен туюнтулат жана ар бир оң анык сан үчүн, узундугу ошол сан болгон кесинди бар.

Эгер кесиндини ченөөдө чексиз ондук бөлчөк келип чыкса, анда кесиндинин узундугунун мааниси жакындатылган болот, бирок, анын мааниси так болсун үчүн аны жөнөкөй бөлчөк түрүндө жазууга болот.

Узундук бирдиги бирдей болсо кесиндилердин узундуктарынын төмөнкү касиеттери туура экендигине ишенүүгө болот:

2. Эгер эки кесинди барабар болсо, анда алардын сан маанилери да барабар, жана тескерисинче:

Эгер эки кесиндинин узундуктарынын сан маанилери бирдей болсо, анда ал кесиндилер да барабар, б.а.

$$a=b<=>m_e(a)= m_e(b)$$

Чындыгында, эгер кесиндилер барабар болушса, анда алардын узундуктарын ченеген мезгилде е ге барабар болгон бирдиктердин жана анын үлүштөрүнүн саны бирдей болот, б.а. барабар кесиндилердин узундуктарынын сан маанилери дал келишет.

Тескерисинче: эгер эки кесиндинин узундуктарынын сан маанилери барабар болсо, анда алар барабар кесиндилерди түзүү процессин кайталашат.

3. Эгер кесинди бир нече кесиндилердин суммасы болсо, анда анын узундугунун сан мааниси түзүүчү кесиндилердин сан маанилеринин суммасына барабар жана тескерисинче, эгер кесиндинин узундугунун сан мааниси түзүүчү кесиндилердин сан маанилеринин суммасына барабар болсо, анда ал кесинди берилген кесиндилердин суммасына барабар, б.а.

$$c=a+b<=>m_e(c)= m_e(a)+ m_e(b)$$

Айталы, а жана в кесиндилердин узундуктары, ал эми $\frac{p}{n}$ жаңа $\frac{q}{n}$ алардын сан маанилери болсун, б.а. $a=\frac{p}{n}e$, $b=\frac{q}{n}e$. Мында е– чен бирдиги. a+b суммасынын маанисин табуу үчүн, эң мурда $\frac{1}{n}e$ ге барабар болгон р кесинди, кийин дагы q кесинди коюлат. Натыйжада, берилген кесиндилердин узундуктарынын суммасы $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ саны менен туюнтулат. б.а.

$$a+b=p\cdot\frac{1}{n}e+q\cdot\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=(\frac{p}{n}+\frac{q}{n})e$$

Тескерисинче: $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ суммасы $\frac{1}{n}e$ кесиндисин p+q жолу коюу керек экендигин билдирет, б.а.

$$(p+q)\frac{1}{n}e=p\cdot\frac{1}{n}e+q\cdot\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=a+b$$

Демек, кесиндилердин узундуктарынын сан маанилери кошулса, тиешелүү кесиндилер да кошулат.

4. Эгер a жана b кесиндилеринин узундуктары b=xa боло тургандай (x− оң анык сан) жана a нын узундугу e бирдиги менен ченелсе, анда e бирдигиндеги b нын узундугунун сан маанисин табуу үчүн e бирдигиндеги a нын узундугунун сан маанисин x санына көбөйтүп коюу жетиштүү, б.а.

$$b=xa<=>m_e(b)=x\ m_e(a)$$

Чындыгында, эгер b=xa жана $a=\frac{p}{n}e$ болсо, анда

$$b=x\cdot\frac{p}{n}e=(x\cdot\frac{p}{n})e\text{, б.а. }m_e(b)=x\ m_e(a).$$

$x\cdot\frac{p}{n}$ көбөйтүндүсү e кесиндисин $x\cdot\frac{p}{n}$ жолу кою керектигин көрсөтөт, б.а.

$$(x\cdot\frac{p}{n})e=x\cdot\frac{p}{n}e=x\cdot b$$

5. Узундуктун бирдигин алмаштырууда, жаңы бирдик эски бирдиктен канча эсе кичине (чоң) болсо, узундуктун сан маанисин ошончо эсе чоңоет (кичирейет).

Узундуктун e жана e_1 бирдиктери берилип, e_1=кe болсун б.а. e_1 бирдиги e ден к эсе чоң болсун. Эгер e бирдигинде a кесиндисинин узундугу $\frac{p}{n}$ сан маанисине ээ болсо, б.а. $a=\frac{p}{n}e$ болсо, анда e_1 бирдигиндеги a нын узундугунун сан мааниси к эсе азаят:

$$a = \frac{p}{n}e = \frac{p}{n}\cdot\frac{1}{k}e_1 = \frac{p}{nk}e_1$$

$\frac{p}{nk}$ саны $\frac{p}{n}$ санына караганда к эсе кичине.

Жогорку далилденген касиеттерден төмөнкү касиеттердин да чын экендиги келип чыгат:

6. $a>b \Leftrightarrow m_e(a)> m_e(b)$

7. $c=a-b \Leftrightarrow m_e(c)= m_e(a)- m_e(b)$

8. $x=a:b \Leftrightarrow x= m_e(a): m_e(b)$

Аталган касиеттер кесиндилердин узундуктарын салыштыруу жана алар менен амалдарды аткаруу операциялары, алардын тиешелүү сан маанилерин салыштыруу жана амалдарды аткаруу операциялары менен алмаштыруу мүмкүн экендигин ырастайт.

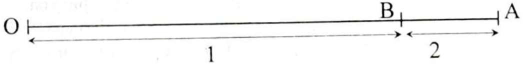
Мисалы, 27 кг> 26,75 кг, себеби 27>26,75

13 м·5= (13·5) м = 65 м

Баштылгыч класстардын программасында кесиндилерди сызуу, узундуктарын салыштыруу, ченөө жана айрым операциялар аткарылат. Аталган операцияларды аткарууда жогоруда каралган касиеттер, өздөрү көмүскөдө калганы менен, пайдаланылышат.

Мисалы: «Биринин узундугу 1 дм, ал эми экинчиси андан 2 см ге узун болгон кесиндилерди сыз» деген тапшырманы аткарууда окуучу ар бир оң санга бир кесинди туура келет деп эсептейт. Узундугу 1 дм болгон кесиндилер өтө көп болгону менен, алардын сызган кесиндилери өз ара барабар болушат.

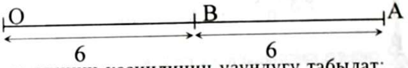
Экинчи кесиндини ар түрдүү жол менен түзүүгө болот: ОА шооласына узундугу 1 дм болгон ОВ кесиндисин коюп, В чекитинен узундугу 2 см болгон ВА кесиндиси коюлат. Же, эң мурда изилденүүчү экинчи кесиндинин узундугун таап, андан кийин узундугу 12 см болгон кесинди сызылат.



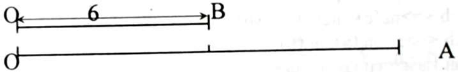
«Биринчисинин узундугу 6 см, ал эми экинчиси андан 2 эсе узун болгон кесиндилерди сыз. Экинчи кесиндинин узундугу канча?» деген тапшырма да эки түрдүү жол менен аткарылат:

1. Узундугу 6 см болгон кесинди сызып, анын уландысына дагы ошондой эле кесиндини өлчөп коебуз. Пайда болгон ОА кесиндиси изделүүчү кесинди болот. Анын узундугу

2·6 см = 12 см



2. Эң мурда экинчи кесиндинин узундугу табылат:
   2·6 см = (2·6) см = 12 см. Кийин узундуктары 6 см жана 12 см болгон кесиндилер сызылат.



6. Фигуранын аянты жана аны ченөө.

Аянт түшүнүгү адамзаттын турмушунда көп кездешүүчү чоңдук болуп эсептелет. Күндөлүк турмушта бөлмөнүн аянты, жер участкасынын аянты, футбол талаасынын аянты, тигил же бул мамлекет ээлеген территория (аянт), ж.б. жөнүндө көп айтылат. Мында, эгер участкалары бирдей болсо, анда алардын аянттары барабар, чоң участка чоң аянтка ээ, үйдүн аянты анын бөлмөлөрүнүн аянттарынын суммасына барабар экендиги да эске алынат.

Аянт чоңдугу жаратылыштагы жалпак фигураларга гана тиешелүү болгон касиет. Айрым учурда көлөмдүү об'ектилердин бети катарында да каралат (пирамиданын бети, конустун бети, ж.б.).

Геометрияда аянт түшүнүгү фигуралардын аянттарын табууда колдонулат. Бирок, геометриялык фигуралар ар түрдүү болгондуктан, аянтка ээ болуучу гана фигуралар жөнүндө сөз болот. б.а. көп бурчтуктардын аянттары, тегеректин аянты, сферанын аянты, цилиндрдин каптал бетинин аянты, ж.б.– булар чектелген жалпак геометриялык фигуралардын аянттары. Мындай фигура башка фигрулардан түзүлүшү (куралышы) мүмкүн. Эгер F фигурасы F_1, F_2, F_3… F_n, фигураларынан түзүлсө, анда алардын биригүүсү F фигурасына барабар жана ал түзүүчүлөр ички жалпы чекитке ээ эмес болуш керек.

Аныктоо: Фигуранын аянты деп ар бир фигура үчүн аныкталган жана төмөнкү шарттар аткарылган терс эмес чоңдук аталат:

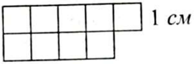
1) барабар фигуралар барабар аянттарга ээ болушат;
2) эгер фигура бир нече чектүү сандагы фигуралардан түзүлсө, анда анын аянты ошол бөлүктөрдүн аянттарынын суммасына барабар;

F фигурасынын аянтка S(F) деп шарттуу түрдө белгиленет. Бул аныктоону кесиндинин узундугунун аныктоосу менен салыштырсак алардын мүнөздөлүүчү касиеттери окшош экендиги көрүнүп турат. Айырмасы– берилген көптүктөрү эки башка.

Аянттарды салыштырууну дайыма эле беттештирүү аркылуу ишке ашыруу мүмкүн эмес. Мисалы, жер аянтчасын салыштыруу. Экинчиден, бири экинчисинен канчага чоң же кичине экендигин аныктоого болбойт. Ошол себептүү фигуралардын аянттарын өлчөө (ченөө) зарылчылыгы келип чыгат.

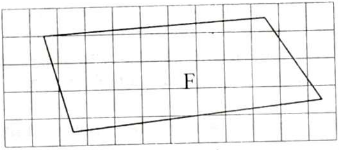
Кесиндини ченөө сыяктуу эле тигил же бул фигуранын аянтын ченөө үчүн аянт бирдиги болуш керек. Ал үчүн кыры узундук бирдиги e болгон квадраттын аянты кабыл алынат жана ал e^2 деп белгиленет. Мисалы, эгер бирдик квадраттын кыры m болсо, анда анын аянты m^2 болот.

Ченөө процесси– бул берилген фигуранын аянтын бирдик квадраттын аянты e^2 менен салыштыруу. Эгер бирдик квадрат белгисиз фигурага x жолу коюлса, анда анын аянты $S(F)=x \cdot e^2$ болот, мында x саны берилген аянт бирдигиндеги берилген фигуранын аянтынын сан мааниси деп аталат. Мисалы, жер аянт бирдиги үчүн 1 $см^2$ алынса, анда төмөнкү чиймедеги фигуранын аянты 9 $см^2$:



Туура формадагы геометриялык фигуралардын (үч бурчтук, тик бурчтук, ромб, трапеция, тегерек, ж.б.) аянттары белгилүү болгон аналитикалык формулалардын жардамы менен так аныкталат. Ал эми туура эмес формадагы фигуралардын аянттары палетка деп аталуучу майда квадраттарга бөлүнгөн тунук (прозрачный) материал менен аныкталат. Экинчи жол менен аянтты ченөө төмөнкүчө жүргүзүлөт:

Аянты аныктала турган F фигурасы жагы e болгон квадраттарга бөлүнгөн палеткага коюлат.



F фигурасы менен жалпы чекитке ээ болгон палетканын эки түрдүү квадраттары бар:

1) F фигурасына толугу менен камтылган;
2) бир бөлүгү- F фигурасына тиешелүү, калган бөлүгү– тиешелүү эмес, б.а. фигуранын контуру (чектелген сызыгы) кесип өткөн.

Эгер биринчи түрдөгү квадраттардын саны m, ал эми экинчи түрдөгүлөрүнүн саны n болсо, анда F фигурасынын аянты үчүн

$$me^2 < S(F) < (m+n)e^2$$

кош барабардыгын жазууга болот. Мындагы m жана m+n сандары ченелүүчү аянттын болжолдуу сан маанилери болушат: m– кеми менен, m+n– ашыгы менен.

Көрүнүп тургандай, палетканын жардамы менен табылган аянттын сан маанисинин тактыгы анчалык эмес. Тактыкты жогорулатуу үчүн палеткадагы квадраттарды алардан кичирээк квадраттарга бөлүү керек. Ал үчүн жагы $e_1 = \frac{1}{10}e$ болгон квадраттарды түзсө болот. Натыйжада F фигурасынын аянтынын мурдагыга караганда бир топ жогорку тактыктагы сан мааниси пайда болот. Бул процессти андан ары да уланттууга болот.

Кеми менен алынган чөнөөнүн болжолдуу маанисинен чоң, ашыгы менен алынган чөнөөнүн болжолдуу маанисинен кичине болгон жана ченелүүчү аянттын так сан мааниси боло турган анык сан табылабы деген суроо пайда болот. Математикада берилген аянт бирдигинде, ар кандай аянт үчүн мындай сандын бар экендиги, анын бир маанилүү болушу жана аныктоодогу 1-2 талаптарга жооп берүүсү далилденген.

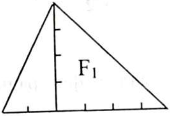
Практикада фигуралардын аянттарын палетканын жардамы менен табуу бир топ ыңгайсыздыктарга алып келгендиктен, ченөөнүн бул ыкмасын зарыл болгон учурларда гана (аналитикалык формуланын жардамы менен аныктоого мүмкүн болбогон) колдонушат.

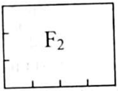
Фигуранын аянтынын сан маанисин кесиндинин узундугу сыяктуу түздөн-түз ченөө аркылуу табууга болбойт. Ал үчүн фигуранын айрым элементтерин өлчөп, алардын сан маанилери менен тиешелүү арифметикалык операцияларды аткарышат. Мисалы, үч бурчтуктун аянтын табуу үчүн анын бир жагынын узундугу менен ага түшүрүлгөн бийиктиктин узундугун көбөйтүп, ал көбөйтүндүнүн жарымын алышат.

Аянт чоңдугунун аныктоосунан жана ченөө процессинин мазмунунан аянттарды салыштыруу жана алар менен амалдарды аткаруу боюнча бизге белгилүү болгон төмөнкү эрежелер келип чыгат:

1. Эгер фигуралар барабар болушса, анда алардын аянттарынын сан маанилери да барабар (аянт бирдиктери бирдей болгондо гана).

Аянттары барабар болгон фигуралар <u>тең чоңдуктагы</u> фигуралар деп аталышат. Мисалы, төмөнкү чиймедеги тик бурчтук жана үч бурчтук тең чоңдукта болушат:





Мында

$S(F_1)=S(F_2)=12$ см^2

2. Эгер F фигурасы F_1, F_2,..., F_n фигураларынан куралса, анда анын аянтынын сан мааниси F_1, F_2,..., F_n фигураларынын сан маанилеринин суммасына барабар (аянт бирдиктери бирдей болгондо гана). б.а.

   $S(F)=S(F_1)+ S(F_2)+...+ S(F_n)$

   Мисалы:

Чиймедеги F фигурасы F_1 жана F_2 фигураларынан куралган. Анда $S(F)=S(F_1)+S(F_2)=$ 6см · 2см + 5см · 3см = 12 см^2 + 15 см^2= =(12+15) см^2=27 см^2

3. Аянт бирдигин алмаштырууда жаңы бирдик эски бирдиктен канча эсе кичине (чоң) болсо, аянттын сан мааниси ошончо эсе чоңоет (кичирейет).

Мисалы, 5 см^2 болгон аянтты квадрат дециметр менен алмаштырып көрөлү.

1 см^2=0,01 дм^2 => 5•(0,01 дм^2)= (5·0,01) дм^2=0,05 дм^2

Башталгыч класстардын окуучулары фигуранын аянты жөнүндө түшүнүк менен жалпак фигураларды салыштыруу аркылуу таанышышат. б.а. дептердин барагы столдун бетинин бир бөлүгүн гана түзгөндүктөн, барактын аянты столдун бетинен аянтынан кичине, бир эле китептин барактары бирдей аянттарга ээ, ж.б. Ошондой эле алар сантиметрлик палетканын жардамы менен айрым, жөнөкөй фигуралардын аянттарын табууну үйрөнүшөт. Бул учурда окуучулар колдонуучу формуланы келтирип чыгаралы:

m−F фигурасында толугу менен жаткан квадраттардын саны, ал эми n− фигуранын контуру өтүүчү квадраттардын саны болсун. Анда $me^2<S(F)<(m+n)e^2$ болгон. F фигурасынын аянтынын болжолдуу маанисин табуу үчүн ашыгы жана кеми менен алынган аянттардын жарым суммасын алабыз, б.а. $S(F)\approx\frac{m+(m+n)}{2}e^2$ же

$$S(F)\approx\frac{m+(m+n)}{2}e^2=\frac{2m+n}{2}e^2=(m+\frac{n}{2})e^2$$

Мисалы, m=26, n= 18 см болсо, анда мындай фигуранын болжолдуу аянттынын сан мааниси

$$S(F)\approx(26+\frac{18}{2})=26+9=25,\ S(F)\approx25\text{ см}^2$$

Тик бурчтуктун аянтын башталгыч класстарда эки түрдүү жол менен табышат:

1) андагы квадраттардын санын эсептөө аркылуу;
2) тик бурчтуктун узундугун туурасына көбөйтүү менен.

Ошондой эле окуучулар фигуранын аянты анын тегиздиктеги же мейкиндиктеги абалына көз каранды болбой тургандыгы жөнүндө да маалымат алышат.

7. Нерсенин массасы жана аны ченөө

Масса− бул негизги физикалык чоңдуктардын катарына кирет.

Адам масса жөнүндө алгачкы маалыматтарды өлчөмү ар түрдүү болгон бир тектүү нерселерди көтөрүп көрүү, салыштыруу аркылуу алат. Мисалы, бир колдогу китеп экинчи колдогу дептерден оор, кичине таш ошондой эле тектүү чоңураак таштан жеңил, окшош, чакаларга куюлган суулардын оордугу бирдей, ж.б. экендигине күндөлүк турмуштук көнүмүш иштердин жана практикалык байкоолордун натыйжасында жетишишет. Демек, нерселер кармап турган заттарынын (молекулаларынын) көп же аз болушуна жараша оор же жеңил болушат. б.а. масса жөнүндөгү алгачкы маалымат нерседеги заттардын саны катарында берилет.

Кийинчерээк аң сезимдин өсүп өнүгүүсү менен масса түшүнүгү ошол нерсенин ылдамдануусу жана ал нерсеге таасир эткен аракеттин негизинде тереңирээк аныкталат (F=ma). Мисалы, бир тектүү бирок, өлчөмдөрү ар башка болгон, нерселерди ордунан жылдыруу же алар кыймылда болсо− токтотуу. Бул учурда Масса− нерсенин инертүүлүгүнүн чени катары каралып жатат.

Масса түшүнүгү нерсенин салмагы менен тыгыз байланышкан. Салмак– бул ошол нерсени Жер өзүнө карай тарткан күч. Ошондуктан, нерсенин салмагы анын өзүнө гана көз каранды эмес. Мисалы, салмак Жердин түрдүү кеңдиктеринде ар башка мааниге ээ: полюста экватордогуга караганда нерсенин салмагы 0,5% ке көп. Бирок, буга карабастан салмак өзгөчө касиетке ээ: ар кандай шартта эки нерсенин салмактарынын катышы өзгөрбөйт ($P_1:P_2=m_1:m_2$). Демек, бир нерсенин салмагын экинчи нерсенин салмагы менен салыштырып чендөөнүн натыйжасында масса деп аталуучу нерсенин жаңы бир касиети көрүнөт.

Ийиндүү (рычагдуу) таразанын бир табакчасына кандайдыр бир а нерсесин, ал эми экинчисине b нерсесин койсо, анда төмөнкү учурлардын болушу мүмкүн:

1). Таразанын эки табакчасы тең бирдей деңгээлге көтөрүлөт; бул учурда тараза тең салмакта турат, ал эми а жана b обьектилери бардей массага ээ деп айтышат;

2). Экинчи табакча биринчиден жогору болот, бул учурда а нын массасы b нын массасынан чоң дешет;

3). Экинчиси биринчисинен төмөн болуп калса, а нын массасы b нын массасынан аз (кичине деп айтышат)

Эгер нерсенин массасын ийиндүү тараза менен экватордо тартып, андан кийин ушул эле нерселерди түндүк же түштүк полюска которуп массаны тапсак, анда массанын эки жердеги табылган маанилери бирдей болот. Демек, нерсе Жер шарынын кайсы гана жеринде жайгашпасын, анын массасы дайыма бирдей болот.

Математиканын тили (көз карашы) менен масса чоңдугу төмөнкүчө аныкталат:

Масса– бул төмөнкү касиеттерге ээ болгон оң чоңдук:

а). Таразада тең салмактуу болгон нерселердин массалары бирдей;

б). Эгер нерселер бириксе, алардын массалары кошулат:бир топ нерселердин жалпы массасы, ар биринин массаларынын суммасына барабар.

Массанын бул аныктоосун узундук менен аянттын аныктоолору менен салыштырсак, масса жогорку аталган чоңдуктар кандай касиеттерге ээ болсо, ошондой эле касиеттерге ээ болорун байкайбыз.

Жогоруда белгилегендей нерсенин массасы ийиндүү тараза менен өлчөнөт. Эң мурда массасы бирдик үчүн кабыл алынган е нерсесин тандап алабыз. Бул массанын үлүшүн да алса болот. Мисалы, массанын бирдиги үчүн килограммды алсак, өлчөө процессинде ага кошумча катарында анын үлүшү– граммды да пайдаланууга болот: 1 г. = 1/1000 кг.

Тарazaнын бир табакчасына массасы аныкталуучу нерсе коюлат да, экинчи табакчага бирдик катарында кабыл алынган нерсени– тараза таштарын салышат. Таштарды таразанын ийиндери түз горизонталдык абалга келгиче (табакчалар тең салмактуу абалда болгуча) салышат. Экинчи табакчадагы таштардын массасы өлчөнүүчү нерсенин массасынын болжолдуу сан маанисин берет. Мисалы, экинчи табакчада 5 кг 460 г дык таштар болсо, анда биринчи табакчадагы нерсенин болжолдуу массасы 5460 г га барабар болот.

Массанын сан мааниси үчүн узундук жөнүндө айтылган бардык айтылыштар туура болот. б.а. массаларды салыштыруу, алар менен амалдарды аткаруу, алардын сан маанилерин салыштырууга жана алар менен арифметикалык амалдарды аткарууга келтирилишет.

Массанын негизги бирдиги– килограмм. Кошумчалары: тонна, грамм, миллиграмм ж.б.

8. Убакыт жана аны ченөө.

Адам затынын бүт өмүр жолу убакыт чоңдугу менен тыгыз байланышкан. Алар жарык дүйнөдө жашоо мезгилинде убакытты эсептөө, үнөмдөө, бөлүштүрүү, туура пайдалануу жана баалоо менен алек. Убакыт түшүнүгү узундук, аянт жана масса түшүнүктөрүнө караганда татаал жана бир топ өзгөчөлүктөргө ээ: эч бир чоңдукка көз карандысыз жана үзгүлтүксүз өзгөрөт, аны токтотууга же артка кайтарууга мүмкүн эмес, ченөө процесси өтө татаал. Убакыт чоңдугун окуп үйрөнүү төмөнкү кыйынчылыктар менен байланышкан:

1) Ар башка мезгилдерде жана түрдүү элдерде убакытты эсептөө жолдору ар түрдүүчө болгон.
2) Убакытты ченөө өтө татаал процесс жана анын негизги чен бирдиктери экөө: сутка жана жыл.
3) Убакыт бөлүктөрүнүн сан маанилери көп түрдүү болушу (бир айда 28, 29, 30 же 31 сутка, бир жылда 365 же 366 сутканын бар экендиги).
4) Чен бирдиктеринин өз ара катнаштыгы узундук, аянт, массалардын чен бирдиктериндеги катнаштыктарга караганда, көп кырдуу болушу. Мисалы:

1 кылым= 100 жыл
1 жыл= 12 ай
1 жума= 7 сутка
1 саат= 60 минута, ж.б.

5) Адамдын убакытты кабыл алуу жөндөмдүүлүгүнө жараша жана убакыттын кандай окуя менен байланышкандыгына байланыштуу убакыттын тигил же бул бөлүгүнүн кыска же узак сезилиши (өтө кызыктуу окуя тез өткөндөй болуп, аз убакыт сарпталгандай сезилет).

Ошондуктан убакыт жөнүндөгү түшүнүктүн пайда болушу жана калыптанышы акырындык менен жүрүп, өтө көп турмуштук байкоолорду талап кылуучу узакка созулган процесс болот.

Убакыттын кыска бөлүктөрү узундук, аянт жана масса сыяктуу чоңдуктардын касиеттерине окшош касиеттерге ээ болгондуктан, математикада скалярдык чоңдук катары каралат. б.а.

1) Убакыт бөлүктөрүн салыштырууга болот. Мисалы, бир эле аралыкты басып өтүү үчүн жөө киши атчанга караганда көп убакыт сарптайт.
2) Убакыт бөлүктөрүн кошууга болот. Мисалы, мектептеги бир сабак менен танапистин суммасы бир саат; күн менен түндүн суммасы– бир сутка.
3) Ошондой эле убакыт бөлүктөрүн кемитүүгө, оң анык санга көбөйтүүгө мүмкүн.
4) Убакыттын бөлүктөрүн ченөөгө болот. Бирок, аны ченөө узундукту ченөө процессинен айырмаланат– узундуктарды ченөө үчүн сызгычты чекиттен чекитке карай жылдыруу менен бир нече жолу колдонууга болот. Ал эми бирдик үчүн кабыл алынган убакыттын бөлүгүн бир гана жолу колдонууга болот. Демек, убакыт бирдиги дайыма кайталануучу процесс болуш керек. Эл аралык бирдиктер системасында мындай бирдик үчүн секунда кабыл алынган. Андан башка да минута, саат, сутка, жыл, жума, ай, кылым сыяктуу бирдиктер да колдонулат. Булардын ичинен жыл жана сутка жаратылыштан алынып, саат, минута жана секунданы адамдар өздөрү ойлоп таап кийиришкен.

Жыл– бул Жердин Күндүн айланасында толук бир айлануусуна кеткен убакыттын бөлүгү. Сутка– бул Жердин өз огунун айланасында бир толук айлануусуна кеткен убакыттын бөлүгү. Бир жыл болжол менен $365\frac{1}{4}$ суткага барабар. Бирок, жашоодогу жыл бүтүн суткалардан турат. Ошондуктан, ар бир жылга 6 сааттан кошуп жүрбөй, ал сааттарды чогултуп, 4 жылда бир узун жыл (366 сутка) киргизилет. Мисалы: 1216, 1764, 1980, 2000, 2004 жылдар узун жылдар (акыркы эки цифрасы 4 кө бөлүнө турган санды берет: 16, 64, 80, 04).

Жылдарды жогоркудай эсептөө боюнча календарь биздин эрага чейинки 46-жылы белгилүү Рим императору Юлий Цезарь тарабынан киргизилген. Ошондуктан мындай календарь Юлиандык деп аталган. Ал календарь боюнча жыл 1-январдан башталып, 12 айдан турат. Анда байыркы Вавилондук астрономдор тарабынан киргизилген жума деген убакыт бирдиги да сакталып калган.

Байыркы Руста жуманы седмица (жети күн деген мааниде), ал эми дем алыш (воскресенье) күнүн недельный (не дельный– иш жок күн) деп аташкан. «Воскресенье» деген сөз «воскрешать» (жаңылоо, кайрадан жаралуу, күчтөнүү) деген сөздөн келип чыгат. Кийинки беш күн дем алыштан бери канча күн өткөндүгүнө байланыштуу аталат: Понедельник– сразу после недели, вторник– второй день, среда– середина, четверг– четвертый день, пятница– пятый день, суббота– конец дел.

Мусулман өлкөлөрүндө жумадагы күндөрдүн аталыштары фарс тилинде 1, 2, 3, 4, 5 сандарынын аталыштары менен байланышкан. Аларды дем алыш (эс алуу, ички рухту тазалоо, кудайга астейдил ыклас кылуу– жума намазы) жума жана ишемби күндөрү болуп, жуманын башталышы жекшембиден башталат. Б.а.

Як-шанба– биринчи күн
Ду-шанба– экинчи күн
Се-шанба– үчүнчү күн
Чор-шанба– төртүнчү күн
Панч-шанба– бешинчи күн

Азыркы учурда жумадагы күндөрдүн кыргыз тилиндеги аталыштары (дүйшөмбү, шейшемби, шаршемби, бейшемби, жума, ишемби, жекшемби) жогорудагы фарс тилиндеги сөздөрдүн бир аз өзгөртүлүп айтылган формалары.

Ай– убакыттын анчалык так аныкталбаган бирдиги болуп эсептелет. Бир айда 28, 29, 30 же 31 сутка болот. Бул Айдын Жер шарынын айланасында толук бир айлануусуна кеткен убакыттын бөлүгү катары байыркы мезгилден бери эле колдонулуп келе жатат. Ай жерди толук бир айланууга болжол менен $29\frac{1}{2}$ сутка сарптап, бир жылда 12 жолу айланат.

Бул маалыматтар байыркы календарларды түзүүгө негиз болушуп, аларды көп кылымдардан берки түзүүлөрдөн кийин азыркы календарь пайда болгон.

Юлиандык календарь христиан мечити тарабынан кабыл алынып, бардык Европа мамлекеттерине 16 кылым кызмат кылды.

Бирок, бул календарь менен убакытты ченөөнүн жыйынтыгы Күн аркылуу ченөөнүн натыйжасы менен туура келбегендиги байкалды. Мисалы, XVI кылымдагы 21-март жазындагы күн-түндүн теңелүү күнү, бул календарь боюнча 11-мартка туура келип калган. 10 суткалык айырма кайдан чыкты– деген суроо пайда болот. Анын себеби: Юлиандык календарь боюнча бир жыл Күн аркылуу эсептелген жылдан 11 минута 14 с. узак болуп, 400 жылда болжол менен үч суткага айырма болуп калган. Бул айырмачылыкты жок кылуу максатында 1582-жылы католик мечитинин ошол кездеги папасы Григорий XIII тарабынан жаңы календарь киргизилген.

Григориандык календарь боюнча жогорку айырма төмөнкүчө жоюлган: юлиандык календардагы узун жылдардын арасынан 400 санына бөлүнбөгөндөрү алынып ташталган. Мисалы, 2000 жыл узун жыл болсо, 2100, 2200, 2300 жылдар (бул сандардын 4 кө бөлүнгөндүгүнө карабастан аларда 365 суткадан бар!) узун жыл эмес.

Бул календарь Европа өлкөлөрүндө кабыл алынганы менен падышачылык Россияда аталган реформа четке кагылган. Бул өтө көп ыңгайсыздыктарга дуушар кылган. Мисалы, Европадан Россияга жөнөтүлгөн телеграмма жөнөтүлгөн күндөн 13 күн мурда (эрте) жеткен

Мындай туура келбөөчүлүктү жок кылуу боюнча орус окумуштууларынын аракетин падышачылык четке каккан. Совет өкмөтүнүн 14-февраль 1918-жылдагы декрети менен 1918-жылдын февраль айы 13 суткага кыскартылган. Б.а. 31-январдан кийин эле (эртеси эле!) 14-февраль келген. Ошол себептүү, убакытты бул декреттен кийинки эсептөө– жаңы стиль менен эсептөө, ал эми убакыттын өзү декреттик убакыт деп аталып келет. Мисалы, Улуу Октябрь социалисттик революциясы 1917-жылы 25-октябрь күнү жеңгени менен, жеңиш күнүн 7-ноябрь күнү майрамдап жүрүшкөн.

Эгер юлиандык календарь боюнча бир жыл Күн боюнча эсептелген жылдан $11\frac{1}{4}$ минута узак болсо, григориандык жыл болгону 26 гана секунда узак. Бул ашыкча убакыт биздин эранын 50-кылымында гана бир сутканы түзөт.

Гриогориандык календарьда дүйнөнүн бардык эле мамлекеттери тарабынан кабыл алынбаган. Мисалы, жакынкы чыгыштагы Египет, Иран сыяктуу өлкөлөр башка календарь– Ай календарын пайдаланышат. Бул календарь боюнча бир жыл 12 айды түзүп, күндүк жылдан 11 сутка кыска. Дагы башка өзгөчөлүгү:

гриогриандык календарь боюнча эсептелүүчү 1986-жыл, Иран мамлекетинде 1406-жыл болот.

Акыркы өзгөчөлүк– убакытты эсептөөнүн башталышын тандоого байланыштуу.

Тигил же бул убакыттын бөлүгүн ченөө үчүн кайсы моменттен баштап эсептөөнү баштоо керек экендигин тактап коюу керек. Себеби, убакыттын башталышы да, аягы да жок, ал дайыма үзгүлтүксүз өзгөрүүдө. Анын башталышын адамдар өздөрү тигил же бул маанилүү окуяга байланыштырып, тандап алышат. Мисалы, байыркы египеттиктер жыл эсептөөнү фараондордун бийлик кылган мезгилдерине карап, кытайлыктар– императорлордун династиясына карата, римдиктер Рим шаарынын түптөлүшүнө карап, христиандар болсо Иса пайгамбардын туулган күнүнөн баштап эсеп жүргүзүшкөн.

Байыркы орустарда жылдын башталышы– март айы (жазгы жумуштардын башталышы) болгон. Христиан динин кабыл алынгандан кийин юлиандык календарь боюнча убакыт эсептешип, жыл эсептөөнүн башталышы үчүн «ааламдын пайда кылынган» күнү эсептелген. Ал күн Иса пайгамбардын туулган күнүнө чейинки 5508-жылга туура келет деп алынган. Бул эсептөө боюнча жылдын башталышы– 1-сентябрь болгон. Убакытты эсептөөнүн мындай системасы XVIII кылымдын башталышына чейин кызмат кылган. Орус элинин прогрессивдүү падышасы улуу Петр I XVIII кылымдын башында убакытты эсептөөнүн жаңы системасын кийирген. Петр I нин указы боюнча жылдын башталышы үчүн 1-январь, ал эми жыл эсептөөнүн башталышы «ааламдын пайда кылынган» күнүнөн эмес «Иса пайгамбардын туулган» күнүнөн эсептелиши белгиленген. б.а. ал указ боюнча 7208-жыл 1700-жыл деп эсептелинет.

Бул система көпчүлүк мамлекеттер тарабынан кабыл алынып, биздин эра деп аталып калган.

Сутканын 24 саатка бөлүнүшү эң байыркы замандарга таандык, биринчилерден болуп байыркы Египетте киргизилген. Минута жана секунда байыркы Вавилондуктарда пайда болгон, ал эми бир саатта 60 минута, бир минутада 60 секунда болушу вавилондук окумуштуулар ойлоп табышкан алтымыштык эсептөө системасынын таасири болуу керек.

9. Убакытты эсептөөгө берилген маселелер

Турмушта убакыт чоңдугу менен байланышкан ар түрдүү практикалык маселелерди чечүүгө туура келет. Мисалы:

1. Окуучулар үчүн жайкы каникул 1-июнда башталып, 91 күн созулду. Каникул качан бүтөт?
2. Жолоочу 5 саат 35 минута жол жүрүп, баруучу жерге саат 12:00 де жетти. Ал жолго саат канчада чыккан?
3. Үйдүн курулушу 12-мартта башталып, ошол жылдын 27-ноябрында бүттү. Курулуш канча убакыт созулган?

Мындай маселелер өздөрүнүн мазмундарына жараша 3 топко бөлүнүшөт:

1. Окуянын башталышы жана созулган убактысы боюнча окуянын бүткөн мезгилин табуу (1-маселе).
2. Окуянын созулган убактысы жана бүткөн мезгили боюнча окуянын башталган убактысын табуу (2-маселе).
3. Окуянын башталган жана бүткөн убактысы боюнча анын канча убакыт жүргөндүгүн (созулгандыгын) табуу (3-маселе).

Убакытты эсептөөгө берилген маселелерди башка чоңдуктар катышкан текстүү маселелер сыяктуу аларга катышкан сандар менен түздөн-түз арифметикалык амалдарды аткаруу аркылуу чыгарууга болбойт. Анын негизги себеби убакыт чендеринин өз ара катнаштыктарынын ар түрдүүчө болушу. Мисалы, бир айда кээде 30 күн болсо, кээсинде 31, же 28, же 29 күн бар. Бир саатта 60 минута, бир жумада 7 күн, бир жылда 365 күн болот. Ошол себептүү мындай маселелерди чыгарууда календарь жана саат циферблатын пайдаланууга туура келет. Экинчиден, убакыт бирдиктери катышкан аттуу сандар эки түрдүү болушат: 15 саат, 49 жыл, 19 кылым, 7 ай, 45 секунда ,18 жаш– булар арифметикалык сандар: 1925-жыл, 28-октябрь, 19-кылым, 2003-жылдын 28-ноябры, 7-ай– булар календардык мөөнөттөр (даталар). Аларды бири-бири менен чаташтырууга болбойт: 19 кылым жана 19-кылым; 2003 жыл жана 2003-жыл. Себеби, 19 кылым– бул убакыттын белгилүү бир бөлүгү, ал эми– 19-кылым– бул окуянын өтүп жаткан календардык мөөнөтү, мезгили. б.а. убакытты эсептөөнүн башталышынан бери 18 кылым өтүп, он тогузунчу кылым өтүп жаткандыгын көрсөтөт. Же 25-октябрь деген календардык мөөнөт, октябрь айынын 24 күнү өтүп, анын жыйырма бешинчи күнү жүрүп жаткандыгын билдирет. Демек, бул түшүнүктөрдүн бирин экинчисине өзгөртүп түзүүгө болот:

Мисалы-1: 28-октябрь 1515-жыл деген календардык датаны арифметикалык санга айландырсак, анда 1514 жыл 9 ай 27 күн болот. Себеби, аталган датага чейин жыл эсептөөнүн башталышынан бери

1514 жыл 9 ай 27 күн өткөн болот. 1515-жыл, 10-ай жана 28-күн али толук бүтө элек.

<u>Мисал-2</u>: XX кылымда 61 жыл 5 ай 23 күн жашаган киши пенсияга чыкты. Ал кишинин кайсы күнү пенсияга жашы толгондугун билүү үчүн 61 жыл 5 ай 23 күн деген арифметикалык санды календардык датага өзгөртүп түзүү керек. Ал үчүн 61, 5 жана 23 сандарын бирге чоңойтобуз, себеби, 62-жыл, 6-ай жана 24-күн али толук өтүп бүтө элек. Демек, изилденүүчү дата 1962-жылдын 24-июну болот.

Бул түшүнүктөрдү ажырата билүү үчүн аларга суроо берсе да болот: арифметикалык сан «канча?» деген суроого жооп берсе, календардык мөөнөт «качан?» деген суроого жооп берет.

Аталган түшүнүктөр жана аларды өзгөртүп түзүү ыкмасы менен таанышкандан кийин, убакытты эсептөөгө берилген маселелерди чыгарууга болот. Алардын бир нечесин карап чыгабыз.

<u>Маселе–1</u>: Мектепте 2003-2004-окуу жылы 1-сентябрда башталып, 9 ай 6 күнгө созулса, ал качан аяктайт?

Башталгыч класстарда жогорку сыяктуу маселелер жылдык календардын (2003 жана 2004-жылдар үчүн) жардамы менен айларды жана күндөрдү жөнөкөй эсептөөнүн натыйжасында чыгарылат, б.а. 2003-жылдын 1-сентябрынан баштап эсептегенде 9 ай 2004-жылдын майы менен, ал эми 6 күн июндун 7-числосунда бүтөт, б.а. окуу жылы 2004-жылдын 7-июнунда аяктайт.

<u>Маселе–2</u>: Мектептин курулушу 1995-жылдын 16-апрелинде башталып, 3 жыл 2 ай 12 күнгө созулду. Мектеп качан ишке киргизилген?

Бул маселени да жогорудай эле календардын (1995, 1996, 1997, 1998-жылдар үчүн) жардамы менен жөнөкөй эсептөө аркылуу чыгарууга болот. Бирок, бир топ ыңгайсыз.

Маселени арифметикалык амалдардын жана жогорку түшүнүктөрдү өзгөртүп түзүүнүн жардамы менен чыгарабыз. б.а.

1) Мектеп курулушу башталганга чейин жыл эсептөөнүн башталышынан бери канча убакыт өттү?
   Бул суроого жооп берүү үчүн 16-апрель 1995-жыл деген календардык мөөнөттү арифметикалык санга айландырабыз. б.а. 1994 жыл 3 ай 15 күн өтөт.
2) Мектеп курулушу бүткөнгө чейин жыл эсептөөнүн башталышынан бери канча убакыт өттү?

Ал үчүн кошуу амалын аткарабыз:

	1994 жыл 3 ай 15 күн
+	3 жыл 2 ай 12 күн
	1997 жыл 5 ай 27 күн

3) Мектеп курулушу качан буткөн?
Бул суроого жооп берүү үчүн жогорку пайда болгон арифметикалык санды календардык датага айландырабыз. Анда мектептин ишке киргизилген күнү 28-июнь 1998-жыл болот.

Мисал–3: Эгер декреттик убакыт 1918-жылы 18-февраль күнү киргизилген болсо, бүгүнкү күнгө (23.11.2003) чейин канча убакыт өттү?

1) Декреттик убакыт киргизилгенге чейин жыл эсептөөнүн башталышынан бери канча убакыт өттү?
Жообу: 1917 жыл 1 ай 17 күн.
2) Жыл эсептөөнүн башталышынан бери бүгүнкү күнгө чейин канча убакыт өттү?
Жообу: 2002 жыл 10 ай 22 күн.
3) Декреттик убакыт кабыл алынгандан ушул күнгө чейин канча убакыт өттү?

	2002 жыл 10 ай 22 күн
–	1917 жыл 1 ай 17 күн
	85 жыл 9 ай 5 күн

Жообу: 85 жыл 9 ай 5 күн

Мисал–4: Белгилүү акын А.С.Пушкин бар болгону 37 жыл 8 ай 4 күн жашап, 1837-жылы 10-февраль күнү дуэлде каза тапкан. Ал киши качан туулган?

1) Акын өлгөн күнгө чейин жыл эсептөөнүн башталышынан бери канча убакыт өткөн?
Жообу: 1836 жыл 1 ай 9 күн.
2) Акын төрөлгөнгө чейин жыл эсептөөнүн башталышынан бери канча убакыт өткөн?

	1836 жыл, 1 ай, 9 күн
–	37 жыл 8 ай 4 күн
	1798 жыл 5 ай 5 күн

3) А.С.Пушкин качан төрөлгөн?
Жообу: 1799-жылы 6-июнь

(Акыркы маселеде убакытты эсептөө жаңы стиль боюнча жүргүзүлдү).

Маселе–5: Атактуу грек окумуштуусу Архимед биздин эрага чейин 212-жылы өлгөн. Анын өлгөн күнүнөн бүгүнкүгө чейин (30.11.2003) канча убакыт өттү?

1) Архимед өлгөн жылдан биздин эранын башталышына чейин канча убакыт өткөн?

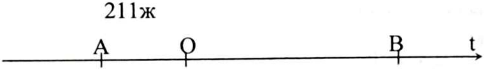
   Жообу: 211 жыл.

2) Бүгүнкү күндөн жаңы эранын башталышына (жыл эсептөөнүн башталышына) чейин канча убакыт өттү?

   Жообу: 2002 жыл 10 ай 29 күн.

3) Архимеддин өлгөнүнөн бери ушул күнгө чейин канча убакыт өттү?

$$\begin{array}{r} 2002 \text{ жыл, } 11 \text{ ай, } 28 \text{ күн} \\ + \quad 211 \text{ жыл} \qquad\qquad\quad \\ \hline 2213 \text{ жыл } 11 \text{ ай } 28 \text{ күн} \end{array}$$



Кошумча маалыматтар.

1. Көптүктөр теориясынын негиздери алгачкы жолу 1872-жылы Георг Кантор (1845-1918-ж.) тарабынан берилген.
2. Чексиз көптүктөр жөнүндө маалымат биринчи жолу Галилео Галиллейдин (1564-1626-ж.) эмгектеринде кездешет.
3. "Функция" терминин математикада эң биринчилерден болуп белгилүү математик Леонард Эйлер (1707-1783-ж.) өзүнүн эмгектеринде пайдаланган. Ал латындын "function" деген сөзүнөн алынып, кыргызча «милдетин аткаруучу» деген мааниде.
4. Математикалык символикалардын жана шарттуу белгилердин киргизилиши:

   « + », « − », « · », « : »− Лейбниц, 1698-жыл;

   $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$ − Рудольф жана Фирар, 1525-жыл.

   Log− Кеплер, жылы белгисиз.

   Sin, Cos, Tg− Л.Эйлер, 1753-жыл.

   « > », « < »− Горриот, 1631-жыл.

   $/\!/$, $\perp$ − Эригон, 1677-жыл.

   a^2, a^m− Декарт, жылы белгисиз
5. Аксиоматикалык метод биздин эрадан 300-400 жыл мурда пайда болуп, XIX кылымдан баштап өнүгө баштаган.

   Математиканын кандайдыр бир бөлүгүн аксиоматикалык метод менен түзүү, негизинен төмөнкү жумуштарды аткарууну талап кылынат:

   1) алгачкы об'ектилер тандалып алынып, аларга аныктоо берилбейт;
   2) об'ектилердин арасындагы алгачкы (негизги) катнаштыктар анык бир мааниде түшүндүрүлүп, алар да аныкталышпайт;
   3) алгачкы түшүнүктөрдүн касиеттерин көрсөтүүчү бир топ алгачкы айтылыштар далилдөөсүз кабыл алынат− алар аксиомалар;
   4) түзүлүүчү теориянын алгачкы түшүнүктөрүнөн башка бардык (туунду) түшүнүктөргө аныктамалар берилет, алар алгачкы түшүнүктөрдүн же өзүнөн мурда аныкталган түшүнүктөр аркылуу аныкталышат;
   5) аксиомалардан башка бардык айтылыштар, теоремалар деп аталып, алар аксиомалардын, алгачкы катнаштыктардын жана өзүнөн мурдагы далилденген теормелардын негизинде далилденет же туура эместиги такталат;

6) түзүлгөн теориянын тууралыгы кандайдыр бир об'ектилердин көптүгүндө интерпритацияланат (модель түзүлөт). Мындай жол, ыкма дедуктивдүү метод деп аталат.

Геометрияны аксиоматикалык жол менен түзүүдө

- биздин эрага чейинки 639-584-жылдары байыркы Милета шаарында жашаган Фалес Милетский,
- биздин эрага чейинки 580-500- жылдары Самес аралында (Эгей деңизи) жашаган Пифагор,
- Пифагордун окуучулары Геракл (530-470), Зенон (490-430), Демокрит (460-370), Платон (427-347), Аристотель (384-322), Эвдокс (408-355), ж.б.

белгилүү роль ойношкон. Мындагы негизги салым Пифагорго таандык. Ал өзүнүн 13 томдуу "Башталма" ("Начало") деген эмгегинин биринчи томун аксиомалардан жана аныктамалардан баштаган. Ошол томунда 24 аныктама, 9 аксиома жана 5 постулат берилген. Калган айтылыштар (теоремалар) жогоркулардын негизинде далилденип барат.

Бул "Башталма" адам баласына 2000 жыл бою аксиоматикалык методдун үлгүсү, өрнөгү катарында кызмат кылып келген.

6. Немец математиги Давид Гильберт (1862-1943) алгачкы об'ектилер үчүн "көптүк", "чекит", "түз сызык" жана "тегиздик" деген түшүнүктөрдү, алгачкы катнаштыктар үчүн "аркылуу өтөт", "арасында жатат", "конгруэнтүү", ал эми алгачкы айтылыштар үчүн 19 аксиома алган. Ошентип ал абсалюттук геометрияны түзгөн.
7. А.Н.Колмогоров (XX кылым) алгачкы об'ектилерге "аралык", "чекит", "түз сызык", "тегиздик" түшүнүктөрүн жана алгачкы сүйлөмдөр үчүн 12 аксиома алган.
8. "Цифра" деген термин, арабдын "сыфр" деген сөзүнөн келип чыккан. Кыргызча мааниси "баш орун" дегенди билдирет.
9. "Нуль" термини XV кылымда латындын nullum деген сөзүнөн келип чыккан. Кыргызча мааниси "эч нерсе эмес".
10. Позициялык эсептөө системасы биринчи болуп Индияда пайда болгон. Ал эмгек IX кылымдын башталышында Мухамед аль Хорезм тарабынан кеңейтилип, анын латын тилиндеги котормосу XIII кылымда Италияда, XVI кылымда Батыш Европада колдонулган.

11. Бурч чоңдугунун чен бирдиги «градус» латындын «gradus» деген сөзүнөн келип чыккан. Кыргызча котормосу «кадам», «тепкич» деген мааниде.

    Минутанын латынча «minutes» деген сөзүнүн котормосу «кичирейтилген», ал эми «secunda» «экинчи» деп которулат. Секунданын алтымыштан бир бөлүгү – терцина, латынча tercins («үчүнчү») деп аталат. Аларды штрихтер менен белгилөө (минута– бир штрих, секунда– эки штрих) биздин эранын II кылымында К.Птолемей тарабынан киргизилген. «Радиан» термини латындын radius («шиш», «нур») деген сөзүнөн келип чыгып биринчи жолу 1873-жылы Англияда экзамендик билеттерде пайдаланылган.

12. “Тригонометрия” деген сөз биринчи жолу (1505-жылы) немец теологу жана математиги Питискустун эмгектеринде кездешет. Ал гректин τριγωνον– үч бурчтук жана μετρεω– өлчөм (чен) деген сөздөрүнөн куралат.

13 «Синус» термини латындын «sinus» («ийилүү», «ийриленүү»), ал эми «косинус» латындын complementu sinus («кошумча синус» же тагыраак айтканда «кошумча жаанын синусу») деген сөзүнөн келип чыккан. «Тангенс» жана «котангенс» терминдерин X кылымда араб математиги Абу-л-Вафа киргизип, биринчи болуп алардын маанилеринин таблицасын түзгөн. Бирок, Европада XVI кылымдын акырында гана пайда болгон;

14. Математикалык анализдин пайда болушу XVIII кылым, ал эми толук негизделиши XIX кылым;

15. Чыныгы сандардын теориясы ар түрдүү формада Р.Дедекинд (1831-1916), К.Вейерштрасс (1815-1897) жана Г.Кантор (1845-1918)– улуу немец математиктери тарабынан түзүлгөн;

16. ∫ символу Лейбниц тарабынан (1675-жылы) киргизилген. Бул белги латын тамгасы S тин (summa) «созулушу» болуп саналат. «Интеграл» деген сөздүн өзүн Я.Бернулли ойлоп тапкан (1690-жылы). Ал латындын integro сөзүнөн келип чыккан, кыргызча котормосу «баштапкы абалына келтирүү», «калыптандыруу» болот. (Интегралдын алдындагы функцияны калыбына келтирет).

17. Бөлчөк көрсөткүчтүү даражалар жана алар менен болгон амалдар алгачкы жолу француз математиги Н.Оремандын (1323-1382-ж.) эмгектеринде кездешет. Көрсөткүчү ноль жана терс болгон даражаларды болжол менен 1445-1500-жылдары Шюке пайдаланган. $\sqrt[n]{a}$ тамырын $a^{\frac{1}{n}}$ деп түшүнүү керектигин С.Стевин

сунуш кылган. Рационалдуу көрсөткүчтүү даражаларды биринчи жолу белгилүү физик Ньютон колдонгон.

18 «Радикал» жана «тамыр» деген терминдер латынча «radix жак» жана «тамыр» деген эки маанилүү сөздөн чыккан. Тамырдын $\sqrt{}$ символу биринчи жолу 1525-жылы пайда болгон.

19. «Логарифма» деген сөз гректин λογοφ (сан) жана αρινμοφ (катыш) деген сөздөрүнөн келип чыккан, котормосу– сандардын катышы. Бул терминди 1594-жылы Дж.Непер ойлоп тапкан. (Логарифма– эки санды салыштыруудан пайда болгон). Негизи е саны болгон логарифманы Спейдел (1619-жылы) киргизген, ал lnx функциясынын биринчи таблицасын түзгөн. Кийинчерээк анын «натуралдык (табигый)» деп аталып калышы, анын «табигыйлыгы» менен түшүндүрүлөт. Бул атты сунуш кылган Н.Меркатор (1620-1687) lnx– бул $y=\frac{1}{x}$ гиперболасынын астындагы аянт экендигин байкаган. Ал «гиперболалык» деген атты да сунуш кылган.

1614-жылы англиялык математик Д.Гантер тарабынан биринчи логарифмалык таблица, ал андан 9 жыл өткөндөн кийин логарифмалык сызгыч ойлонуп табылган.

Адабияттар

1. Бурбаки Н. Теория множеств. М., “Мир”, 1963.
2. Виленкин А.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. М., “Просвещение”, 1977.
3. Клини С.К. Математическая логика. М., “Мир”, 1973.
4. Назаров М. Мектеп математикасынын илимий негиздери. Фрунзе “Мектеп”, 1981.
5. Слупецкий Е. Элементы математической логики и теорий множеств. М., “Мир”, 1971
6. Сидорова Л.А. Теоретические основы начального курса математики. М., “Просвешение”, 1975.
7. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М., “Просвешение”, 1988.
8. Феферман С. Числовые системы. М., “Наука”, 1971
9. Энциклопедия элементарной математики. Том I-V. М., 1951-1960.
10. А.Н.Колмогоров, А.И.Абрамов. ж.б. Алгебра и начало анализа. Бишкек, «Мектеп», 1992.

МАЗМУНУ